Examen Analyse IV — Eerste zittijd 1995–96
Tweede Kandidatuur Wiskunde

1. Stel X en Y twee genormeerde ruimten.
   (a) Geef een nodige en voldoende voorwaarde voor de continuiteit van een lineaire afbeelding $u : X \longrightarrow Y$.
   (b) Toon aan dat deze voorwaarde equivalent is met het bestaan van getallen $a > 0$ en $r > 0$ zodanig dat $\|u(x)\| \leq a$ als $\|x\| \leq r$.
   (c) Beschrijf in het kort hoe men een norm kan definieren op de ruimte $\mathcal{L}(X, Y)$ van continue lineaire afbeeldingen $u : X \longrightarrow Y$.

2. Stel X en Λ twee reële Banachruimten, $\omega \subset \Lambda$ open, $0 \leq k < 1$, en $f : X \times \omega \longrightarrow X$ een afbeelding van de klasse C^1 en zodanig dat

$$\|D_1 f(x, \lambda)\| \leq k, \qquad \forall (x, \lambda) \in X \times \omega.$$

· Toon aan dat f een gelijkmatige contractie is; besluit hieruit (zonder gedetailleerd bewijs) dat er voor elke $\lambda \in \omega$ een uniek element $x = x^*(\lambda) \in X$ bestaat zodanig dat

$$x^*(\lambda) = f(x^*(\lambda), \lambda)),$$

en dat de afbeelding $x^* : \omega \longrightarrow X$ continu is.

· Toon aan dat deze afbeelding continu afleidbaar is, en geef een formule voor de afgeleide.

3. Stel $f : M_1 \rightarrow M_2$ een afbeelding tussen twee metrische ruimten. Toon aan:
   (i) f is continu in een punt $a \in M_1$ dan en slechts dan als voor elke rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M_1 met $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ geldt dat $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$;
   (ii) als de restrictie van f tot elke compacte deelruimte van M_1 continu is, dan is f continu in gans M_1.

(Gebruik voor (ii) het feit dat als $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ dan de verzameling $A := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ compact is; bewijs dit).

C