Examen Analyse IV – Eerste zittijd 2003–2004
Tweede Kandidatuur Wiskunde
Groep 1 — Theorie

1. Stel $f : M \to M'$ een continue afbeelding tussen twee metrische ruimten (M, d) en (M', d'), en stel $K \subset M$ compact. Toon het volgende aan:

(a) voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat er een $\delta > 0$ zodanig dat

$$d'(f(x), f(y)) < \varepsilon, \qquad \forall x \in K,\ \forall y \in B(x;\delta).$$

Beschouw vervolgens het speciaal geval van een continue afbeelding $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, waarbij we aannemen dat $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gesloten en begrensd is. Toon aan:

(b) f is gelijkmatig continu.

Onder bijkomende hypothesen kan die gelijkmatige continuiteit van f nog verder aangescherpt worden. Veronderstel bijvoorbeeld dat f continu afleidbaar is in Ω, en dat Ω convex is: als $x, y \in \Omega$ dan is ook $[x, y] := \{x + s(y - x) \mid 0 \leq s \leq 1\} \subset \Omega$. Toon dan aan:

(c) er bestaat een constante $M \geq 0$ zodanig dat $\|Df(x)\| \leq M$ voor alle $x \in \Omega$;

(d) $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$ voor alle $x, y \in \Omega$ (d.w.z. dat f Lipschitz-continu is).

Toon tenslotte aan hoe uit (d) opnieuw volgt dat f gelijkmatig continu is.

2. Formuleer en bewijs het basisresultaat i.v.m. de symmetrie van de tweede afgeleide van een afbeelding tussen twee Banachruimten. Toon ook aan hoe hieruit de klassieke formule

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x), \qquad \forall x \in \Omega,\ \forall i, j : 1 \leq i, j \leq n$$

volgt, geldig voor elke $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ welke tweemaal afleidbaar is in de open deelverzameling $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

groep 2 : Riesz + Middelwaardestelling
groep 3 : Riesz + 1 v. groep 1

Examen Analyse IV – Eerste zittijd 2003–2004
Tweede Kandidatuur Wiskunde
Groep 2 — Theorie

1. Formuleer de middelwaardestelling voor afbeeldingen van $\mathbb{R}$ naar een Banachruimte X, en geef het bewijs voor het geval dat de uitzonderingsverzameling D leeg is.

Pas deze middelwaardestelling toe om het volgende te bewijzen: als $I \subset \mathbb{R}$ een open interval is, X een Banachruimte, $x_0 \in X$, en $f : I \to X$ een afleidbare afbeelding zodanig dat $\|f'(t) - x_0\| \leq M$ voor een zekere $M \geq 0$ en voor alle $t \in I$, dan geldt voor alle $\alpha, \beta \in I$ met $\alpha < \beta$ dat

$$\|f(\beta) - f(\alpha) - x_0(\beta - \alpha)\| \leq M(\beta - \alpha).$$

2. Formuleer en bewijs de stelling van Riesz in verband met lokaal compacte genormeerde ruimten.

Beschouw als toepassing een continue afbeelding $f : X \to \mathbb{R}$ (met X een genormeerde ruimte) welke de volgende eigenschap heeft: er bestaat een $R > 0$ en een $\alpha \in \mathbb{R}$ zodanig dat $f(x) \geq \alpha$ voor alle $x \in \bar{B}(0; R)$ (dit betekent dat f naar beneden begrensd is in de gesloten bal $\bar{B}(0; R)$). Stel

$$\beta := \inf_{x \in \bar{B}(0;R)} f(x);$$

er bestaat dan een rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\bar{B}(0; R)$ zodanig dat

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \beta.$$

Onder welke voorwaarden kan men garanderen dat β ook een *minimum* is van f in $\bar{B}(0; R)$? (Dit betekent dat er een $\bar{x} \in \bar{B}(0; R)$ bestaat zodanig dat $f(\bar{x}) = \beta$).

Examen Analyse IV – Eerste zittijd 2003–2004
Tweede Kandidatuur Wiskunde
Oefeningen

1. Deze vraag heeft tot doel het bestaan aan te tonen van welbepaalde oplossingen van de *differentievergelijking*

$$x_{n+1} = f(x_n) + y_n, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

In deze vergelijking zijn $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tweezijdige rijën van reële getallen, en $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een gegeven functie. Er wordt verondersteld dat de functie f continu afleidbaar is, en dat er een getal $k \in]0,1[$ bestaat zodanig dat $|f'(x)| \leq k$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. We noteren met $X = \mathcal{B}(\mathbb{Z};\mathbb{R})$ de Banachruimte van alle begrensde tweezijdige rijen $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, met de klassieke supremumnorm: $\|x\| := \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|$ als $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X$. Ook noteren we met $\sigma : X \to X$ de zogenaamde *schuifoperator* gedefinieerd door

$$\sigma(x)_n := x_{n+1}, \qquad \forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X.$$

Toon het volgende aan:

(a) σ is een lineaire isometrie van X op zichzelf (d.w.z. σ is lineair, bijectief, en $\|\sigma(x)\| = \|x\|$ voor alle $x \in X$); besluit hieruit dat $\|\sigma\| = \|\sigma^{-1}\| = 1$, en geef ook de expliciete definitie van σ^{-1};

(b) voor elke $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X$ is ook de tweezijdige rij $F(x) := (f(x_n))_{n\in\mathbb{Z}}$ begrensd, en dus is $F : X \to X$ (gebruik de continuiteit van f en het feit dat voor $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X$ geldt dat $x_n \in \bar{B}(0;\|x\|)$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$);

(c) de afbeelding $F : X \to X$ is een contractie;

(d) voor $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X$ en $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X$ kan men de vergelijking (1) herschrijven als

$$x = G(x,y), \tag{2}$$

met $G : X \times X \to X$ gedefinieerd door

$$G(x,y) := \sigma^{-1}(F(x) + y);$$

(e) G is een gelijkmatige contractie, en dus heeft de vergelijking (2) (en de equivalente vergelijking (1)) voor elke $y \in X$ een unieke oplossing $x \in X$.

Voor elk geheel getal $p \geq 1$ noteren we met X_p de deelruimte van X bestaande uit alle *p-periodieke* elementen van X, d.w.z. van alle $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X$ welke zodanig zijn dat $x_{n+p} = x_n$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$. Toon aan:

(f) $x \in X_p$ dan en slechts dan als $x \in X$ en $\sigma^p(x) = x$;

(g) X_p is een gesloten deelruimte van X, en dus een Banachruimte;

(h) $G(X_p \times X_p) \subset X_p$;

(i) als $y \in X_p$ dan behoort de unieke oplossing van (1) ook tot X_p.

Bonusvraag: hoe ziet de unieke oplossing van $x_{n+1} = f(x_n)$ er uit?

(4) Toepassing. Neem $M = [0,1] \subset \mathbb{R}$ en definieer

$$f_1 : M \longrightarrow M, \quad x \longmapsto f_1(x) := \frac{1}{3}x$$

en

$$f_2 : M \longrightarrow M, \quad x \longmapsto f_2(x) := 1 - \frac{1}{3}(1-x).$$

Voor elke $A \subset M$ stellen we

$$F(A) := f_1(A) \cup f_2(A).$$

Toon aan:

(a) $F(A) \in \mathcal{M}$ als $A \in \mathcal{M}$, dus $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$;

(b) F is een contractie op de complete metrische ruimte $(\mathcal{M}, d_H)$, en dus heeft F een uniek fixpunt $C \in \mathcal{M}$.

Kan je dit fixpunt C nader omschrijven?
(Beschouw daartoe de rij $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{M}$, met $C_0 = M = [0,1]$ en $C_{n+1} := F(C_n)$).

Enige toelichting: de verzameling C is een elementair voorbeeld van een *fraktale verzameling*, en de gebruikte methode om deze fraktale verzameling te construeren (als fixpunt van F) is een eenvoudig voorbeeld van de zogenaamde IFS-techniek (Iterated Function System).