

Theoretische mechanica

Theorie gesloten boek

Vraag T1

Beschouw een standaardbasis $e = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ en een orthonormale, positief georiënteerde, bewegende basis $e' = (\mathbf{e}'_1(t), \mathbf{e}'_2(t), \mathbf{e}'_3(t))$, zodat $\mathbf{e}'_i(t) = a_{ji}(t)\mathbf{e}_j$, waarbij $A = (a_{ji}(t))$ een speciale orthogonale matrix is.

1. Bereken de afgeleiden $\dot{\mathbf{e}}'_i(t)$, ten aanzien van de bewegende basis. Bespreek ook de ogenblikkelijke rotatievector van (e') ten opzichte van (e) .
2. Bewijs voor een willekeurige vectorfunctie $\mathbf{x} : I \rightarrow \text{Vect } E : t \mapsto \mathbf{x}(t)$ de formule die het verband geeft tussen de afgeleide $\dot{\mathbf{x}}(t)$ ten opzichte van de basis e en ten opzichte van de basis e' .
3. Geef het verband tussen de absolute snelheid en versnelling in het 'vaste' assenstelsel en de relatieve snelheid en versnelling in het bewegende assenstelsel.

Vraag T2

1. Geef de definitie van het massamiddelpunt C van een stelsel met N deeltjes.
2. Geef het verband tussen het impulsmoment L_O ten opzichte van de oorsprong en het impulsmoment L_C ten opzichte van het massamiddelpunt.
3. Toon aan dat de kinetische energie van het stelsel gelijk is aan de som van de kinetische energie van het massamiddelpunt, waarin de totale massa van het stelsel zit, en de kinetische energie van de relatieve beweging van het stelsel ten opzichte van het massamiddelpunt.

Oefeningen open boek

Vraag O1

Beschouw de beweging van een deeltje met massa m in het verticaal vlak, gebonden aan een kromme. Kies het assenstelsel in het verticaal vlak, met de x -as horizontaal en de y -as verticaal naar boven gericht. Beschouw nu de tangentiële eenheidsvector \mathbf{e}_t die raakt aan de grafiek met loodrecht daarop de eenheidsvector \mathbf{e}_n , zodat

$$\mathbf{e}_t = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y \quad \text{en} \quad \mathbf{e}_n = -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y$$

De binding is ruw en voldoet aan $\mathbf{R} = R_t \mathbf{e}_t + R_n \mathbf{e}_n$ waarbij $R_t = -\mu R_n$. De kromtestraal ρ voldoet aan $\rho = b \cos \theta$ waarbij b een gekende constante is.

1. Toon aan (door onder andere gebruik te maken van het verband tussen $\frac{d\mathbf{e}_t}{ds}$ en \mathbf{e}_n , waarbij s de booglengte is) dat

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

2. Toon aan dat de snelheid van het deeltje voldoet aan de volgende vergelijking (je moet hiervoor de vergelijking niet oplossen).

$$\frac{dv^2}{d\theta} + 2\mu v^2 = -2bg \cos \theta (\sin \theta + \mu \cos \theta)$$

Vraag O2

Beschouw een massaloze staaf AB die kan slingeren waar aan het uiteinde (bij B) een gewicht met massa m is vastgemaakt. Kies het assenstelsel zo dat de x-as horizontaal ligt en evenwijdig met de slingerrichting en de y-as verticaal naar beneden gericht zodat het punt A vasthangt aan de y-as op een afstand van de oorsprong die varieert volgens een gekende functie $h(t)$. Noem de hoek tussen de y-as en de slinger ϕ .

1. Stel de Lagrangiaan L en de Lagrange-vergelijkingen op. (Je moet deze niet oplossen).
2. Geef de Hamiltoniaan H . Is H een eerste integraal? Stelt H de totale energie van het systeem voor?