Examen Analyse IV – Eerste zittijd 2002–2003
Tweede Kandidatuur Wiskunde
Oefeningen

1. Stel $X = \mathcal{B}(\mathbb{N};\mathbb{R})$ de Banachruimte van alle begrensde rijen van reële getallen $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, met de supremumnorm

$$\|x\| := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|, \qquad \forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X.$$

Stel anderzijds $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continu afleidbare functie.

(1) Toon aan dat voor elke $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ de verzameling

$$K_x := \operatorname{afsl}(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}) \subset \mathbb{R}$$

compact is. Besluit hieruit dat de verzamelingen $\{f(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ en $\{f'(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ begrensd zijn.

(2) Voor elke $x \in X$ definiëren we een nieuwe rij van reële getallen, namelijk

$$F(x) := (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X.$$

Toon aan dat $F(x) \in X$ voor elke $x \in X$.

(3) Gebruik stelling 1.10.18 (met $A = K_x$) om te bewijzen dat de afbeelding $F : X \to X$ continu is: voor elke $x \in X$ en voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat er een $\delta > 0$ zodat $\|F(x+\tilde{x}) - F(x)\| < \varepsilon$ als $\|\tilde{x}\| < \delta$.

(4) Voor elke $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ definiëren we een afbeelding $u_x : X \to X$ door

$$u_x(\tilde{x}) := (f'(x_n)\,\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \forall \tilde{x} = (\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X.$$

Toon aan dat $u_x(\tilde{x}) \in X$ voor alle $\tilde{x} \in X$, en bewijs dat $u_x : X \to X$ lineair en continu is, met

$$\|u_x\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} |f'(x_n)|.$$

(5) Gebruik de middelwaardestelling en opnieuw stelling 1.10.18 om aan te tonen dat er voor elke $x \in X$ en elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat

$$\|F(x+\tilde{x}) - F(x) - u_x(\tilde{x})\| < \varepsilon\|\tilde{x}\|$$

als $\|\tilde{x}\| < \delta$. Dit betekent dat $F : X \to X$ afleidbaar is, met $DF(x) = u_x$ voor alle $x \in X$.

(6) Toon aan dat

$$\|DF(x) - DF(\hat{x})\| = \|u_x - u_{\hat{x}}\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} |f'(x_n) - f'(\hat{x}_n)|,$$

en gebruik een analoge redenering als in (3) om aan te tonen dat de afbeelding $DF : X \to \mathcal{L}(X)$ continu is. De conclusie is dus dat de afbeelding $F : X \to X$ continu afleidbaar is.

2. De bedoeling van deze opgave is om onder zekere voorwaarden het bestaan aan te tonen van oplossingen van stelsels differentiaalvergelijkingen. Stel $\mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R} \mid t \ge 0\}$, en stel $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een afbeelding welke *Lipschitz-continu* is, d.w.z. dat er een constante $L > 0$ bestaat zodanig dat

$$\|f(x) - f(y)\| \le L\|x - y\|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(Hierin is $\|\cdot\|$ een willekeurige norm op $\mathbb{R}^n$, bijvoorbeeld de Euclidische norm). Voor elke $x_0 \in \mathbb{R}^n$ kan men volgend beginwaardenvraagstuk beschouwen:

$$\dot{x} = f(x), \qquad x(0) = x_0. \tag{1}$$

Een (voorwaartse) oplossing van (1) is een continue afbeelding $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto x(t)$, met $x(0) = x_0$, welke afleidbaar is voor $t > 0$, en zodanig dat $\dot{x}(t) = f(x(t))$ voor alle $t > 0$. Het is triviaal om aan te tonen dat een continue afbeelding $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ een oplossing is van (1) dan en slechts dan als

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))\,ds, \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

Deze integraalvergelijking (2) vormt de basis voor de verdere analyse.

Voor elke $\gamma > 0$ stellen we X_γ gelijk aan de vectorruimte van alle continue afbeeldingen $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ waarvoor geldt dat

$$\|x\|_\gamma := \sup_{t \geq 0} e^{-\gamma t}\|x(t)\| < \infty;$$

De bedoeling van de volgende vragen bestaat erin aan te tonen dat er bij gepaste keuze van $\gamma > 0$ voor elke $x_0 \in \mathbb{R}^n$ een unieke afbeelding $x \in X_\gamma$ bestaat welke voldoet aan (2).

(a) Toon aan dat $\|\cdot\|_\gamma$ een norm is op X_γ.

(b) Controleer dat de afbeelding $\varphi : X_\gamma \to \mathcal{BC}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n)$ gedefinieerd door

$$\varphi(x)(t) := e^{-\gamma t}x(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in X_\gamma,$$

een normbehoudend isomorfisme is. Besluit hieruit dat X_γ een Banachruimte is.

(c) Voor elke $x_0 \in \mathbb{R}^n$ en elke $x \in X_\gamma$ definiëren we een continue afbeelding $F(x_0, x) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ door

$$F(x_0, x)(t) := x_0 + \int_0^t f(x(s))\,ds, \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Toon aan dat $F(x_0, x) \in X_\gamma$; maak hierbij gebruik van het feit dat $\|x(t)\| \leq e^{\gamma t}\|x\|_\gamma$ als $x \in X_\gamma$, en ook van de ongelijkheid

$$\|f(x)\| \leq \|f(0)\| + \|f(x) - f(0)\| \leq \|f(0)\| + L\|x\|, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

(d) Toon aan dat er een getal $k > 0$ bestaat zodanig dat

$$\|F(x_0, x) - F(\hat{x}_0, \hat{x})\|_\gamma \leq \|x_0 - \hat{x}_0\| + k\|x - \hat{x}\|_\gamma, \qquad \forall x_0, \hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n,\ \forall x, \hat{x} \in X_\gamma.$$

Bereken dit getal k en besluit dat $F : \mathbb{R}^n \times X_\gamma \to X_\gamma$ gelijkmatig continu is.

(e) Toon aan dat men $\gamma > 0$ zodanig kan kiezen dat $F : \mathbb{R}^n \times X_\gamma \to X_\gamma$ een gelijkmatige contractie is. Besluit hieruit dat (bij dergelijke keuze van γ) er voor elke $x_0 \in \mathbb{R}^n$ een unieke afbeelding $x = x^*(x_0) \in X_\gamma$ bestaat zodanig dat

$$x^*(x_0) = F(x_0, x^*(x_0)),$$

en dat de afbeelding $x^* : \mathbb{R}^n \to X_\gamma$, $x_0 \mapsto x^*(x_0)$ continu is.

Zonder veel verdere moeite (maar dit hoef je niet uit te werken op dit examen) kan men aantonen dat elke continue afbeelding $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ welke voldoet aan (2) noodzakelijk samenvalt met $x^*(x_0)$. Op die manier bekomt men dus een unieke oplossing van (1) welke bovendien nog op een continue manier afhangt van de keuze van de beginwaarde x_0.

Examen Analyse IV – Eerste zittijd 2002–2003
Tweede Kandidatuur Wiskunde
Groep 1 — Theorie

1. Deze vraag bestaat uit drie delen:

(a) Formuleer en bewijs de stelling van Baire.

(b) Stel (M, d) een complete metrische ruimte, en stel $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een aftelbare collectie van gesloten deelverzamelingen $A_n \subset M$ zodanig dat

$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Toon aan dat voor minstens één $n \in \mathbb{N}$ moet gelden dat $\mathrm{inw}(A_n) \neq \emptyset$.

(c) Stel (M, d) een complete metrische ruimte zonder geïsoleerde punten. Geef in het kort aan waarom volgende beweringen correct zijn:

(i) voor elke $x \in M$ is $A_x := M \setminus \{x\}$ open en dicht in M;

(ii) als $B := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ een aftelbare deelverzameling is van M, en als we $A_n := M \setminus \{x_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ stellen, dan is

$$M \setminus B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset;$$

(iii) M is niet aftelbaar.

2. Stel X en Y twee Banachruimten, en $f : X \to Y$ een homeomorfisme; veronderstel ook dat f afleidbaar is in een punt $x_0 \in X$. Onder welke voorwaarden is de inverse afbeelding $g = f^{-1} : X \to Y$ dan afleidbaar in het punt $y_0 := f(x_0)$? En waaraan is $Dg(y_0)$ gelijk? Geef de nodige bewijzen.

Toon ook aan hoe men het voorgaande kan gebruiken om de klassieke formule

$$\frac{d}{dt}\sqrt[3]{t} = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}, \qquad \forall t \neq 0,$$

af te leiden.

Examen Analyse IV – Eerste zittijd 2002–2003
Tweede Kandidatuur Wiskunde
Groep 2 — Theorie

1. Deze vraag bestaat uit drie delen.

(a) Bewijs dat een deelverzameling $A \subset \mathbb{R}$ samenhangend is dan en slechts dan als A een interval is.

(b) Formuleer en bewijs de stelling van Bolzano.

(c) Stel M een samenhangende metrische ruimte, A en B twee disjuncte niet-lege en compacte deelverzamelingen van M, en definieer $f : M \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) := d(x, A) - d(x, B), \qquad \forall x \in M.$$

Leg uit waarom volgende uitspraken geldig zijn:

(i) f is continu;

(ii) $f(x) < 0$ als $x \in A$.

(iii) $f(x) > 0$ als $x \in B$.

(iv) de verzameling

$$C := \{x \in M \mid d(x, A) = d(x, B)\}$$

is niet leeg.

2. Formuleer en bewijs het basisresultaat in verband met de symmetrie van de tweede afgeleide van afbeeldingen tussen Banachruimten. Verklaar ook hoe men dit resultaat kan toepassen op afbeeldingen $f : \mathbb{R}^n \to X$ (met X een Banachruimte) om de klassieke formule te bewijzen die zegt dat

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x), \qquad \forall x \in X, \quad \forall i, j, \ 1 \le i, j \le n,$$

indien f tweemaal afleidbaar is.