Examen Analyse IV – Tweede zittijd 2001–2002
Tweede Kandidatuur Wiskunde
Theorie

1. Stel X en Y twee genormeerde ruimten (over eenzelfde veld $\mathbb{K}$), en beschouw de vectorruimte $\mathcal{L}(X;Y)$ van continue lineaire afbeeldingen $u : X \to Y$. Toon aan hoe men een norm kan definiëren op deze ruimte van lineaire afbeeldingen, en bewijs dat $\mathcal{L}(X;Y)$ compleet is indien Y compleet is.

Beschouw het geval waarbij $Y := \mathbb{R}$ en $X := \mathcal{C}(\Omega;\mathbb{R})$, de vectorruimte van alle continue functies $f : \Omega \to \mathbb{R}$, met $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ een gegeven compacte deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. Stel $u : \mathcal{C}(\Omega;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ de lineaire afbeelding gegeven door

$$u(f) := \int_\Omega f(x)\, dx, \qquad \forall f \in \mathcal{C}(\Omega;\mathbb{R}).$$

Toon aan dat u continu is wanneer men in $\mathcal{C}(\Omega;\mathbb{R})$ de norm $\|f\| = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$ gebruikt; waaraan is $\|u\|$ dan gelijk? Is u ook nog continu wanneer men in $\mathcal{C}(\Omega;\mathbb{R})$ de norm

$$\|f\| = \int_\Omega |f(x)|\, dx$$

gebruikt? Waaraan is desgevallend de norm $\|u\|$ dan gelijk?

2. Stel (M,d) en (M',d') twee metrische ruimten, waarbij M' compleet is. Stel $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij van afbeeldingen $f_n : M \to M'$ welke gelijkmatig convergeert naar een afbeelding $f : M \to M'$. Stel tenslotte $a \in M$ een ophopingspunt van M, en veronderstel dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ de limiet

$$a'_n := \lim_{x\to a} f_n(x) \in M'$$

bestaat. Toon aan dat de rij $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een Cauchy-rij vormt in M' en dus convergeert naar een element $a' \in M'$. Bewijs ook dat

$$a' = \lim_{x\to a} f(x), \qquad \text{d.w.z.:} \quad \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Gebruik dit resultaat om het volgende aan te tonen: als X een Banachruimte is en $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een gelijkmatig convergente rij van trapfuncties $f_n : \mathbb{R} \to X$, dan is de limietafbeelding $f : \mathbb{R} \to X$ geregeleerd.