Theoretische Mechanica

Theorie

1. Beschouw een deeltje waarop een kracht $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ werkt, gebonden aan een oppervlak S met parametervoorstelling

$$\mathbf{r} : Q \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (q_1, q_2) \mapsto \mathbf{r}(q_1, q_2) \in S$$

   met Q een open gebied in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbf{r}$ de plaatsvector van een punt van het oppervlak ten opzicht van een vooropgestelde oorsprong. Deze binding suggereert ook een reactiekracht $\mathbf{R}$ die later nog te bepalen is.

   a) Wat is een regulier punt van S? Geef ook de definitie van de eenheidsvector volgens de oppervlaktenormaal van S in een regulier punt.

   b) Geef de vectoriële bewegingsvergelijking in functie van de variabelen $(t, q_i, \dot{q}_i)$. Toon aan dat de normale component van de reactiekracht ondubbelzinnig bepaald is door de projectie van deze bewegingsvergelijking op de oppervlaktenormaal van S.

   c) Geef de projecties van de bewegingsvergelijking op de raaklijnen aan S (dit zijn de oplossingen van $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$). Geef ook de twee situaties, die van een gladde verbinding en die van de Coulombwrijving, waarvoor de projecties kunnen opgelost worden naar $q_1(t)$ en $q_2(t)$.

2. Beschouw een Lagrangiaan $\mathbf{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ met $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ de veralgemeende coördinaten en $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$ de veralgemeende snelheden. De Lagrangiaan wordt verondersteld van klasse C^2 te zijn.

   a) We definiëren een functie $\mathbf{h}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \dot{q}_i}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{q}_i - \mathbf{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Toon aan dat dit een eerste integraal is van de Lagrangevergelijkingen als en slechts als $\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$.

   b) Stel de Legendretransformatie $(q, \dot{q}) \to (q, p)$ corresponderend met de Lagrangiaan $L(t, q, \dot{q})$ op met $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ het toegevoegde moment. Wanneer is deze transformatie inverteerbaar?

   c) Definieer de Hamiltoniaan. Toon ook de equivalentie aan tussen de Lagrangevergelijkingen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ enerzijds en tussen de Hamiltonvergelijkingen $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ en $\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}$ anderzijds.

Oefeningen

1. Beschouw een deeltje dat een cirkelvormige baan beschrijft rond een middelpunt O zodat de versnelling $\mathbf{a}$ steeds loodrecht staat op de verbindingslijn tussen het punt P waar het deeltje zich bevindt en een vast punt A. Kies nu een assenstelsel in het vlak van de cirkelvormige baan met de oorsprong in O, de x-as volgens OA en de y-as loodrecht daarop. Noem θ de hoek ingesloten tussen OA en OP. Op $t = 0$ is de hoek $\theta = \frac{\pi}{3}$ en $\mathbf{v_0}$ de beginsnelheid rakend aan de cirkel.

   a) Toon aan dat uit de voorwaarde op $\mathbf{a}$ volgt dat $\theta(t)$ voldoet aan volgende vergelijking:
   $$\ddot{\theta}\sin\theta = (1 - \cos\theta)\dot{\theta}^2$$

   b) Toon aan voor $\frac{\pi}{3} \leqslant \theta < \pi$: de hoeksnelheid $\dot{\theta}$ in functie van de beginsnelheid $v_0 = \|\mathbf{v_0}\|$, de straal R van de cirkel en θ is:
   $$\dot{\theta} = \frac{3v_0}{2R(1 + \cos\theta)}$$

   c) Bereken de tijd tussen $\theta(0) = \frac{\pi}{3}$ en $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

2. Beschouw een deeltje met massa m, verbonden aan een veer, vastgemaakt aan een vast punt O met natuurlijke lengte a en veerconstante k, in een buis die met constante hoeksnelheid $\omega = \sqrt{\frac{k}{5m}}$ ronddraait in tegenwijzerzin rond de horizontale door O loodrecht op het draaivlak. Op $t = 0$ is de buis horizontaal en is het deeltje in rust ten opzichte van de buis op een afstand a van O.

   a) Bereken de afstand van het deeltje tot O in functie van de tijd.

   b) Bereken de grootte van de reactiekracht van de buis op het deeltje op $t = \frac{2\pi}{\omega}$.