Examen numerieke methoden

Master wiskunde

Theorie – 29 mei 2017

Naam : ....   Richting : ....

1. (2 pt) Definieer, formuleer of omschrijf de volgende begrippen :

   (i) De lineaire differentie-operator $\mathcal{L}[z(x);\, h]$ geassocieerd aan $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i\, y_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i\, f_{n+i}$

   (ii) De eerste Dahlquist-barrière

   (iii) A-stabiliteit

   (iv) toegevoegde van een numerieke methode voor $y' = f(x,\, y)$.

2. (2 pt) Formuleer en bewijs de CFL-voorwaarde.

3. (2 pt) Wat is het idee achter Fourier-analyse bij het numeriek oplossen van PDVen?

4. (3 pt) Welke verschillende mechanismen hebben we in de cursus ontmoet om een foutschatting uit te voeren, en aldus een variabele-staplengte-bepaling mogelijk te maken?

5. (3 pt) Karakteriseer stijve problemen op 3 verschillende manieren.

6. (3 pt) Als voor een s-traps Runge-Kutta methode de rijvereenvoudigende voorwaarde $C(\eta)$, met

$$C(\eta) : \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\, c_j^{q-1} = \frac{c_i^q}{q} \qquad \begin{cases} q = 1, \ldots, \eta \\ i = 1, \ldots, s \end{cases}$$

geldt, maar niet $C(\eta+1)$, dan wordt η de traporde (*stage order*) van de methode genoemd.

(i) Wat is de maximale traporde voor een expliciete methode?

(ii) Wat is de maximale traporde voor een impliciete methode? Hoe noemen we dergelijke methoden? Geef de algemeenste 1-traps methode van deze soort.

(iii) Bouw je een methode met een hoge traporde, dan heeft dit als voordeel dat je heel wat ordevoorwaarden kunt laten vallen. Er zijn echter nog andere voordelen aan verbonden. Vertel nog iets extra's over het nut van een hoge traporde.

7. (2 pt) Zij t een boom en zij F de functie die bomen associeert met elementaire differentialen voor het probleem.

(i) Wat is het verband tussen $F(t)$ en $F([t])$?

(ii) Hoe luidt dit verband voor het stelsel $y' = A\, y$?

8. (2 pt) We koppelen de 2-staps Nyström predictor

$$y_{n+1} - y_{n-1} = 2\,h\,f_n$$

aan de 2-staps Milne-Simpson corrector

$$y_{n+1} - y_{n-1} = \frac{h}{3}\,(f_{n+1} + 4\,f_n + f_{n-1})$$

in een $\mathrm{P(EC)}^4\,\mathrm{E}^{1-t}$-mode en we passen dit toe op $y' = y$ met $y(0) = 1$. Daartoe nemen we als startwaarden $y_0 = 1$ en $y_1 = \exp(h)$.

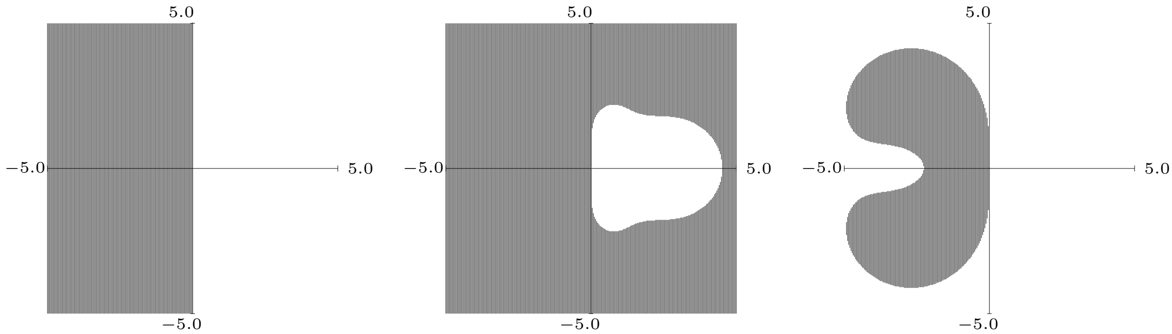
In de onderstaande tabel wordt, na iedere stap van het schema, de leidende term uit de fout op y_2 gevraagd. Vul dit, zonder ook maar de minste berekening uit te voeren, zoveel mogelijk in. Maar hierbij gebruik van de onderstaande informatie :

$$y_{n+q} - y_{n+q-l} = h \sum_{i=0}^{q-u} \gamma_i\,\nabla^i\,f_{n+q-u}$$

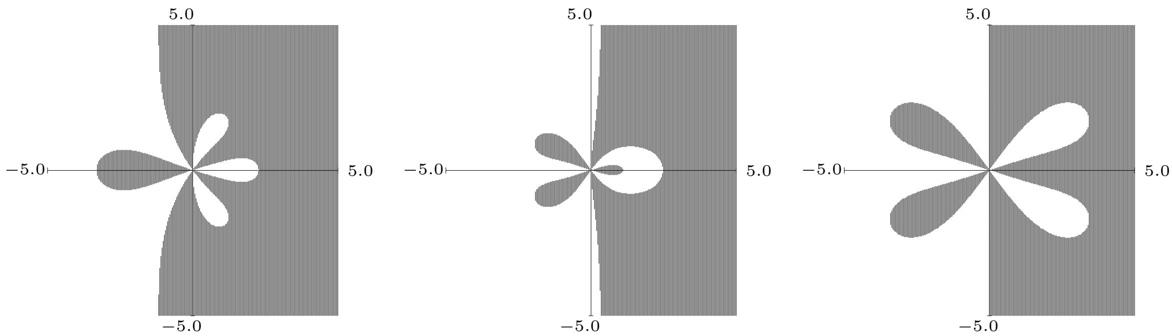
	γ_0	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	$\cdots$
Adams-Bashforth	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{251}{720}$	$\frac{95}{288}$	$\frac{19087}{60480}$	
Adams-Moulton	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{19}{720}$	$-\frac{3}{160}$	$-\frac{863}{60480}$	
Nyström	2	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{29}{90}$	$\frac{14}{45}$	$\frac{1139}{3780}$	
Milne–Simpson	2	-2	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{90}$	$-\frac{1}{90}$	$\frac{37}{3780}$	

na P	$\ldots\ h^{\cdots}$
na P(EC)	$\ldots\ h^{\cdots}$
na $\mathrm{P(EC)}^2$	$\ldots\ h^{\cdots}$
na $\mathrm{P(EC)}^3$	$\ldots\ h^{\cdots}$
na $\mathrm{P(EC)}^4$	$\ldots\ h^{\cdots}$

9. (2 pt) Hieronder vind je de ordesterren en de stabiliteitsgebieden van drie methoden. Welk gebied en welke ster horen bij welke methode en wat kun je zeggen over de stabiliteit van deze methoden? De gebieden waarbij $|R(\hat{h})| < |\exp(\hat{h})|$ (ordester) of $|R(\hat{h})| < 1$ (stabiliteitsgebied) zijn gearceerd.



A B C



I II III

(i) ordester I en gebied . . . ; . . . . stabiel

(ii) ordester II en gebied . . . ; . . . . stabiel

(iii) ordester III en gebied . . . ; . . . . stabiel