Examen Analyse IV – Eerste zittijd 2001–2002
Tweede Kandidatuur Wiskunde
Oefeningen

1. De bedoeling van deze opgave is om aan te tonen dat de klassieke Cantorverzameling compact, perfect en totaal onsamenhangend is. Om dit op een systematische manier uit te werken gaan we als volgt te werk.

We beginnen met twee functies $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ te definiëren, als volgt:

$$\varphi_1(x) := \frac{1}{3}\,x, \qquad \varphi_2(x) := \frac{1}{3}\,(2+x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Merk op dat φ_1 en φ_2 homeomofismen zijn (enkele van de verder te bewijzen resultaten zijn hiervan een gevolg). Stel

$$A_0 = I := [0,1] \quad \text{en} \quad A_{n+1} := \varphi_1(A_n) \cup \varphi_2(A_n), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De Cantorverzameling C wordt dan gegeven door

$$C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

(i) Toon (via volledige inductie) aan dat elke A_n niet-leeg en compact is, en dat $A_{n+1} \subset A_n$. Besluit hieruit dat C niet-leeg en compact is.

(ii) Gebruik opnieuw inductie om aan te tonen dat elke A_n bestaat uit 2^n disjuncte gesloten intervallen met lengte gelijk aan 3^{-n}.

(iii) Kies twee verschillende punten x en y in C, neem aan met met $x < y$. We hebben dan voor elke $n \in \mathbb{N}$ dat $x \in A_n$ en $y \in A_n$. Kies n voldoende groot en gebruik (ii) om aan te tonen dat er een $z \in \mathbb{R}$ bestaat met $x < z < y$ en $z \notin C$. Besluit hieruit dat C totaal onsamenhangend is.

(iv) Toon aan dat voor elke deelverzameling $A \subset \mathbb{R}$ geldt dat $\varphi_i(\partial A) = \partial\varphi_i(A)$ $(i = 1, 2)$. Gebruik dit om via volledige inductie aan te tonen dat $\partial A_n \subset \partial A_{n+1} \subset A_{n+1}$. Besluit hieruit dat $\partial A_n \subset C$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

(v) Kies een $x_0 \in C$ en een $\epsilon > 0$. Gebruik (ii) (met n voldoende groot) en (iv) om aan te tonen dat er een $x \in C$ bestaat met $x \neq x_0$ en $|x - x_0| < \epsilon$. Besluit hieruit dat C perfect is.

Opmerking. In een meer abstract kader definieert men een Cantorverzameling als een compacte metrische ruimte welke terzelfdertijd perfect en totaal-onsamenhangend is. Ook kan men aantonen dat in een complete metrische ruimte elke (niet-lege) perfecte verzameling noodzakelijk oneindig en niet-aftelbaar is. (Waarschuwing: op het web zijn enkele foutieve bewijzen van dit resultaat te vinden). Elke Cantorverzameling is dus niet-aftelbaar.

2. Stel X de verzameling van alle rijen $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ zodanig dat $\lim_{n\to\infty} 2^{-n} x_n = 0$, en stel Y de verzameling van alle rijen $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ zodanig dat $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Voor elke $m \in \mathbb{N}$ noteren we met e_m de rij $e_m = (\delta_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ (d.w.z. dat e_m een rij is met op elke plaats 0, behalve op de m-de plaats waar er een 1 staat). Merk op dat e_m zowel tot X als tot Y behoort.

(a) Kontroleer (beknopt) dat X en Y vectorruimten zijn over $\mathbb{R}$, en dat de afbeelding

$$\varphi : X \longrightarrow Y, \;\; x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \varphi(x) = (y_n = 2^{-n} x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

een lineaire bijectie is van X op Y.

(b) De vectorruimte Y is een deelruimte van de Banachruimte $\mathcal{B}(\mathbb{N};\mathbb{R})$; toon aan dat Y een *gesloten* deelruimte is van $\mathcal{B}(\mathbb{N};\mathbb{R})$, en concludeer dat Y een Banachruimte is (vergeet niet de bijbehorende norm te preciseren).

(c) Gebruik de afbeelding φ om op X een norm te definiëren zodanig dat X een Banachruimte wordt en φ een norm-behoudend isomorfisme.

(d) Toon aan dat voor elke $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ geldt dat $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n$.

(e) Stel $u \in \mathcal{L}(X;\mathbb{R})$, en stel $\zeta_n := u(e_n)$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Gebruik (d) om aan te tonen dat

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n x_n, \qquad \forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X. \tag{1}$$

(f) Stel u en ζ_n ($n \in \mathbb{N}$) zoals in (e), en $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Toon aan dat de rij $\tilde{x} := (\operatorname{sgn}(\zeta_n)|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ een element is van X; gebruik (1) om $u(\tilde{x})$ te berekenen, en besluit dat de reeks (1) absoluut convergeert.

(g) Stel u en ζ_n ($n \in \mathbb{N}$) zoals in (e), en definieer voor elke $n \in \mathbb{N}$ een element $x^{(n)} \in X$ door $x^{(n)} := \sum_{j=0}^{n} 2^j \operatorname{sgn}(\zeta_j)\, e_j$ te stellen. Toon aan dat inderdaad $x^{(n)} \in X$, bereken $\|x^{(n)}\|$ en $u(x^{(n)})$, en besluit dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n\, |\zeta_n| \leq \|u\|. \tag{2}$$

(h) Stel u en ζ_n ($n \in \mathbb{N}$) zoals in (e), en $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Toon aan dat $|x_n| \leq 2^n \|x\|$, en gebruik dit in (1) om aan te tonen dat

$$|u(x)| \leq \|x\| \sum_{n=0}^{\infty} 2^n\, |\zeta_n|.$$

Kombineer dit met (2) om aan te tonen dat

$$\|u\| = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n\, |\zeta_n|. \tag{3}$$

(i) Stel $z = (\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in $\mathbb{R}$ zodanig dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n\, |\zeta_n| < \infty. \tag{4}$$

Definieer $u_n : X \to \mathbb{R}$ door $u_n(x) := \sum_{j=0}^{n} \zeta_j x_j$ te stellen als $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Toon aan dat $u_n \in \mathcal{L}(X;\mathbb{R})$ (voor elke $n \in \mathbb{N}$), en dat voor elke $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n x_n$ absoluut convergeert (gebruik (4) en de ongelijkheid $|x_n| \leq 2^n\|x\|$). Besluit hieruit dat voor elke $x \in X$ de limiet

$$u(x) := \lim_{n\to\infty} u_n(x) \tag{5}$$

bestaat, en dat (5) een continue lineaire afbeelding $u \in \mathcal{L}(X;\mathbb{R})$ definieert.

Het voorgaande toont aan dat de Banachruimte $\mathcal{L}(X;\mathbb{R})$ kan geïdentificeerd worden met de ruimte van alle rijen $z = (\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ waarvoor (4) geldt; de norm in deze ruimte wordt gegeven door (3). De ruimte $\mathcal{L}(X;\mathbb{R})$ noemt men de *duale* ruimte van X; deze duale ruimte wordt meestal genoteerd als X^*.

Examen Analyse IV – Eerste zittijd 2001–2002
Tweede Kandidatuur Wiskunde
Groep 2 — Theorie

1. Stel X en Z twee Banachruimten, $Y \subset X$ een dichte deelruimte, en $u : Y \to Z$ een continue lineaire afbeelding. Toon aan hoe men u kan uitbreiden tot een continue lineaire afbeelding van X naar Z.

Beschrijf in het kort (d.w.z. zonder gedetailleerde bewijzen) hoe men dit resultaat kan gebruiken om de integraal te definiëren van (zekere) afbeeldingen $f : \mathbb{R} \to X$.

Zijn er ook nog andere manieren om continue lineaire afbeeldingen te definiëren via limietovergangen? (Ook hier worden geen details gevraagd)

2. Stel X en Y twee Banachruimten, en $f : X \to Y$ een homeomorfisme; veronderstel ook dat f afleidbaar is in een punt $x_0 \in X$. Onder welke voorwaarden is de inverse afbeelding $g = f^{-1} : X \to Y$ dan afleidbaar in het punt $y_0 = f(x_0)$? En waaraan is $Dg(y_0)$ gelijk? Geef de nodige bewijzen.

Toon ook aan hoe men het voorgaande kan gebruiken om de klassieke formule

$$\frac{d}{dt}\sqrt{t} = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \qquad \forall t > 0,$$

af te leiden.