Naam:

Examen Lineaire Algebra en Meetkunde
Tweede zit 2016-2017 (13:30-17:30)

1 Deel gesloten boek (theorie) (5.5pt) - indienen voor 14u30

(0.5pt) Geef de kleinste kwadratenoplossing van het stelsel $AX = d$, waarbij $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ rang n heeft.

...

(0.5pt) Definieer de determinant van een matrix.

...

(0.5pt) Definieer een reflectie in E^3.

...

Naam:

(20 × 0.2pt) Kleur telkens het vierkantje in als en slechts als het statement waar is. Voor een juist antwoord krijg je +0.2 punten, bij een fout antwoord -0.2 punten. Je krijgt minimaal 0/4 op deze vraag. Dit is identiek aan het door UGent opgelegde standard setting systeem voor meerkeuzevragen.

- ☐ Zij $T : V \to V$ een lineaire operator, met V een vectorruimte over $\mathbb{R}$. Dan heeft T minstens één reële eigenwaarde.
- ☐ Equivalente stelsels kunnen verschillende (maar isomorfe) oplossingenverzamelingen hebben.
- ☐ Als $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{k \text{ keer}} = 0$ in een veld, dan is k de karakteristiek van dat veld.
- ☐ De karakteristiek van $\mathbb{C}$ is twee.
- ☐ Voor elk natuurlijk getal n geldt dat $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.
- ☐ Zij $T \in End(\mathbb{R}^n)$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$. Dan is $\{1, T, T^2, T^3, \ldots\}$ een lineair afhankelijk stel.
- ☐ Als $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inverteerbaar is, dan is A orthogonaal.
- ☐ De karakteristieke veelterm van een $n \times n$ matrix (of meer precies: van een lineare operator wiens matrixvoorstelling een $n \times n$ matrix is) heeft altijd graad n.
- ☐ Elke symmetrische matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is diagonaliseerbaar.
- ☐ De ongelijkheid van Cauchy-Schwarz zegt dat in elke euclidische ruimte V geldt dat $\forall v, w \in V$: $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$.
- ☐ Voor vierkante matrices A, B van dezelfde afmetingen geldt altijd dat dat $\det AB = \det BA$.
- ☐ Een matrix is $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is orthogonaal als en slechts als $A^t = A^{-1}$.
- ☐ De notatie $W = V_1 \oplus V_2$ impliceert dat $V_1 \cap V_2 \neq \{0\}$.
- ☐ Als V, W eindigdim en $T : V \to W$, dan is $\dim W = \dim\ker T + \dim T(V)$.
- ☐ Als voor vectoren $v_1, \ldots, v_n$ geldt dat ze lineair afhankelijk zijn, dan kan elk van die vectoren geschreven worden als een lineaire combinatie van de overige $n-1$ vectoren.
- ☐ Voor elke $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (en de geassocieerde lineaire transformatie) geldt dat $\ker A^t = (\text{im}A)^\perp$.
- ☐ Zij $T : V \to V$ een lineaire operator. Voor elke invariante deelruimte $W \leq V$ geldt dat $T(W) = W$.
- ☐ Voor elke $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ geldt dat $(A + B)^t = B^t + A^t$.
- ☐ Elke basis van een vectorruimte bevat een orthonormale basis als deelverzameling.
- ☐ Zij W een ruimte, V een deelruimte, en $T : V \to W$ een lineaire afbeelding. Dan is het mogelijk dat $\dim T(V) > \dim V$.

2 Deel open boek zonder computer (8.5pt) - indienen voor 16u15

2.1 Theorie (2.5pt)

In volgende onderdelen wordt telkens een matrix $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ omschreven. Is zo'n A altijd, soms of nooit inverteerbaar? Motiveer je antwoord (foute of geen motivering = geen punten). Je moet dus:

- ofwel argumenteren dat zo'n matrix *nooit* inverteerbaar is, en bewijzen waarom;
- ofwel argumenteren dat zo'n matrix *altijd* inverteerbaar is, en bewijzen waarom of een expliciete inverse geven;
- ofwel argumenteren dat *beide* kunnen, en dus een voorbeeld geven van een inverteerbare matrix met die eigenschappen én een voorbeeld van een niet-inverteerbare matrix met die eigenschappen (of toch minstens omschrijven hoe je zo'n voorbeeld kunt construeren).

(0.5pt) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ waarbij je gegeven krijgt dat $\theta \in [0, 2\pi[$.

(0.5pt) $A = \begin{pmatrix} a & b & a+b \\ c & d & c+d \\ e & f & e+f \end{pmatrix}$ waarbij je gegeven krijgt dat $a+b+c+d+e+f = 2017$.

Naam:

(0.5pt) $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ waarbij je gegeven krijgt dat $A^{2017} = 0$.

(0.5pt) $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ waarbij je gegeven krijgt dat $A^2 + 3A - I = 0$.

(0.5pt) $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ waarbij je gegeven krijgt dat $A^3 - 2017A^2 + A = 0$.

Naam:

2.2 Oefeningen (6pt)

(3pt) Gegeven is de afbeelding $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ bepaald door

$$g((x_1, y_1, z_1)^t, (x_2, y_2, z_2)^t) = x_1x_2 + x_1y_2 + ax_2y_1 + y_1y_2 + 3z_1z_2,$$

met $a \in \mathscr{R}$ een parameter. Voor welke waarde(n) van a is het paar $(\mathbb{R}^3, g)$ een Euclidische ruimte? Bewijs je antwoord.

Naam:

(3pt) Gegeven volgende matrix (over $\mathbb{C}$).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Is deze matrix diagonaliseerbaar? Motiveer je antwoord. Indien diagonaliseerbaar, geef een diagonaalmatrix D en een matrix P zodanig dat $D = P^{-1}AP$. Geef in beide gevallen expliciet je methode en tussenstappen.

Naam:

3 Oefeningen, open boek met computer (6pt) - indienen voor 17u30

Volgende oefening mag je met behulp van Maple maken, maar enkel wat je hieronder schrijft wordt gequoteerd. Beschrijf wat je doet en waarom je dit doet.

(2ptn) We hebben de gegevens uit de volgende tabel:

x	1	2	3	4
y	-3	-5	2	1
z	-5	3	5	6

Zoek de best passende vergelijking van de vorm $x = a + by + cz$.

Naam:

(4ptn) Gegeven een rotatie met as met als richtingsvector (3,2,1) en als hoek 120 graden in tegenwijzerzin. Geef de matrix van deze beweging ten opzichte van de standaardbasis.

4 Kladzone – wordt niet verbeterd, moet niet ingediend worden

Naam:

Naam: