Examen Analyse 1

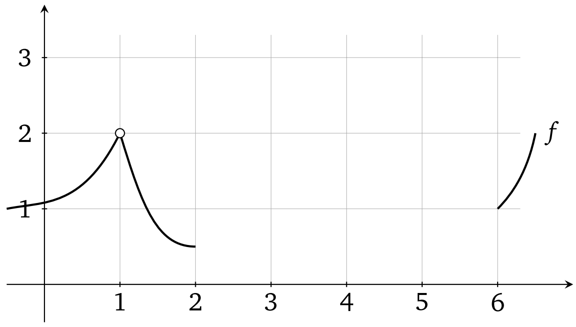
1ste jaar bachelor in de Informatica

Voorbeeldexamen

Naam:

Schrijf je naam hierboven en beantwoordt vraag 1 en 2 op dit blad. De overige vragen beantwoord je op een geruit blad. Vermeld duidelijk het nummer van de (deel)vraag bij elk antwoord. Indien je een (deel)vraag niet beantwoordt, vermeld dan ook duidelijk het nummer van deze (deel)vraag samen met de vermelding "geen antwoord". Schrijf niet met potlood of in het rood of in een onleesbaar kleur (b.v. geel). Geef bij elk antwoord telkens de nodige uitleg en berekeningen zodat duidelijk wordt wat je redenering is. Er wordt niet naar het kladpapier gekeken, dus zorg dat de nodige tussenstappen op de geruite bladeren staan. Wie aan het examen begint, blijft minstens 1 uur zitten.

1. Zij f de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ functie met grafiek:



Vul deze grafiek aan zodanig dat dit de grafiek wordt van een functie g (m.a.w. er moet gelden dat $g\big|_{]-\infty,2[\cup]6,+\infty[\setminus\{1\}} = f$) die voldoet aan al de volgende eigenschappen tegelijk:

   (i) g bezit geen limiet in 6 maar wel in 1,

   (ii) g is afleidbaar in 2 maar niet in 3,

   (iii) $g\big|_{[0,4]}$ is continu,

   (iv) g bezit een verticale asymptoot in 5,

   (v) g is afleidbaar over $]4,5[\,\cup\,]5,6[$ en $(\forall x \in\,]4,5[\,\cup\,]5,6[)(Dg(x) \leqslant 0)$,

   (vi) $\int_3^4 g(x)dx = 2$.

2. Duid het juiste antwoord aan (correct antwoord: $+0.5$; foutief antwoord: -0.5; meer dan 1 antwoord: -0.5; blanco: 0):

   (i) Stel $f(x) = 2x - 3$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, en $\operatorname{def}(g) = [-1, 1]$, dan is de maximale definitieverzameling van $g \circ f$ gelijk aan:

   ☐ $[1, 2]$ ☐ $[-1, 1]$ ☐ $\mathbb{R}$

   (ii) De functie $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{als } x \geqslant 0, \\ 1, & \text{als } x = -1, \end{cases}$ is continu in:

   ☐ $[0, +\infty[$ ☐ $\{-1\} \cup [0, +\infty[$ ☐ $\mathbb{R}$

(iii) Stel $\lim_{x\to a} g(x) = b$ en $\lim_{x\to b} f(x) = c$, dan is $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x)$ gelijk aan:

☐ b ☐ c ☐ onbepaald

(iv) De substitutie $t = e^x$ toepassen op $\int e^x \sin(e^x)dx$ levert:

☐ $\int t\sin(t)dt$ ☐ $\int \sin(t)dt$ ☐ $\int \ln(t)\sin(\ln(t))dt$

(v) De reeks $\sum x_n$ met $x_n = \frac{\operatorname{arctg}(n)}{n^2}$, voor alle $n\in\mathbb{N}^*$, is convergent omdat:

☐ $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = 1$, wegens de ratiotest is de reeks dus convergent

☐ $\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n} = 0$, met $y_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$, voor alle $n\in\mathbb{N}^*$, dus wegens de asymptotische vergelijkingstest is de reeks convergent

☐ $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$, hieruit volgt onmiddellijk dat de reeks convergent is

3. Toon aan dat
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{(a+x)(b+x)(c+x)} - x\right) = \frac{a+b+c}{3},$$
met $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

4. Gegeven de functie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ met waarde in x gegeven door
$$f(x) = \frac{\ln(\ln(x^2))}{2x^3-4x}.$$
   (i) Bepaal de maximale definitieverzameling van f.
   (ii) Ga na of f een even of oneven functie is.
   (iii) Bepaal alle nulpunten van f.
   (iv) Geef een volledig limietonderzoek van f ten opzichte van $(\bar{\mathbb{R}}, d')$.
   (v) Bepaal alle asymptoten van f.

5. Los de volgende vergelijking op:
$$\left(\log_3(x)\right)^{-1} + \left(\log_{(x-1)(x+4)}(x)\right)^{-1} = 1 + \log_x(2x+13).$$

6. Bereken
$$\int_{16}^{+\infty} \frac{1}{2(\sqrt{x}-1)(x-6\sqrt{x}+9)}\,dx.$$

7. Gegeven de reeks
$$\sum \frac{2n}{(7n-3)^{\frac{4}{3}}}.$$
Is deze reeks absoluut convergent? Is deze reeks convergent? Verklaar uw antwoord.