Examen Analyse IV — Eerste zittijd 2000–2001
Tweede Kandidatuur Wiskunde
Groep 1

1. Stel M_1, M_2 en M' drie metrische ruimten, en $f : M = M_1 \times M_2 \to M'$ een afbeelding welke voldoet aan volgende voorwaarden

(i) de partiële afbeelding $f_{a_1} : M_2 \to M'$ is continu voor elke $a_1 \in M_1$;

(ii) de collectie van partiële afbeeldingen $(f^{a_2})_{a_2 \in M_2}$ is equicontinu in M_1.

Toon aan dat de afbeelding f dan continu is, en illustreer dit resultaat met behulp van de functie $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ gegeven door

$$f(x,y) := \frac{x}{y} \text{ als } 0 \le x \le y \text{ en } y \ne 0, \quad f(x,y) := \frac{y}{x} \text{ als } 0 \le y \le x \text{ en } x \ne 0, \quad \text{en } f(0,0) := 0.$$

2. Formuleer en bewijs de stelling van Riesz in verband met lokaal compacte genormeerde ruimten.

3. Stel X en Y twee Banachruimten, $\Omega \subset X$ open, en $f : \Omega \to Y$ een continu afleidbare afbeelding welke tweemaal afleidbaar is in een punt $x_0 \in \Omega$. Toon aan dat dan de bilineaire afbeelding

$$D^2 f(x_0) : X \times X \longrightarrow Y, \; (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \longmapsto D^2 f(x_0) \cdot (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$$

symmetrisch is, d.w.z. dat

$$D^2 f(x_0) \cdot (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = D^2 f(x_0) \cdot (\tilde{x}_2, \tilde{x}_1), \qquad \forall \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in X.$$

4. Stel X de vectorruimte van alle continue 2π-periodieke reëelwaardige functies: $f \in X$ als $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu is en zodanig dat $f(t + 2\pi) = f(t)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. Definieer een afbeelding $\varphi : X \to X$ door

$$\varphi(f)(t) := (f(t))^3, \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \forall f \in X.$$

Toon het volgende aan:

(i) de ruimte X kan geïdentificeerd worden met de ruimte

$$Y := \{f \in C([0, 2\pi]; \mathbb{R}) \mid f(0) = f(2\pi)\};$$

(ii) Y is een gesloten deelruimte van de Banachruimte $C([0, 2\pi]; \mathbb{R})$; besluit hier uit dat X eveneens een Banachruimte is, en geef expliciet de norm;

(iii) de afbeelding φ is continu;

(iv) de afbeelding φ is afleidbaar; geef expliciet de formule voor de afgeleide.

Is de afbeelding φ ook continu afleidbaar?

Examen Analyse IV — Eerste zittijd 2000–2001
Tweede Kandidatuur Wiskunde
Groep 3

1. Stel $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij van continue afbeeldingen $f_n : M \to M'$ tussen twee metrische ruimten M en M', en veronderstel dat deze rij gelijkmatig convergeert naar een afbeelding $f : M \to M'$. Toon aan dat de limietafbeelding f continu is. Geef ook aan of dit resultaat al dan niet van toepassing is op de rij van functies gegeven door

$$f_n : [0,1] \longrightarrow [0,1],\ x \longmapsto f_n(x) := x^n$$

(met dus $M = M' = [0,1]$).

2. Stel A een willekeurige niet-lege verzameling, X een genormeerde ruimte, en $\mathcal{B}(A;X)$ de verzameling van alle begrensde afbeeldingen $f : A \to X$. Toon aan dat $\mathcal{B}(A;X)$ een vectorruimte is en definieer een gepaste norm op deze vectorruimte. Bewijs dat $\mathcal{B}(A;X)$ een Banachruimte is indien X een Banachruimte is.

Gebruik dit resultaat om een norm te definiëren op de vectorruimte Y van alle begrensde rijen $y = (\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ van reële getallen; toon ook aan dat de bekomen genormeerde ruimte $(Y, \|\cdot\|)$ compleet is.

3. Stel X_i $(1 \le i \le n)$ en Y Banachruimten, stel $X := X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, en stel $f : X \to Y$ een continue afbeelding. Toon aan dat f continu afleidbaar is dan en slechts dan als f continu partieel afleidbaar is naar elk van zijn veranderlijken. Geef ook het verband aan tussen de (totale) afgeleide en de partiële afgeleiden van f.

4. Stel $X = \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ de Banachruimte van alle continue functies $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ (met de supremum-norm). Definieer een afbeelding $\varphi : X \to X$ door

$$\varphi(f)(t) := \int_0^t (f(s))^3\, ds, \qquad \forall t \in [0,1],\ \forall f \in X.$$

Toon het volgende aan:

(i) de afbeelding φ is continu;

(ii) de afbeelding φ is afleidbaar; geef expliciet de formule voor de afgeleide.

variant op 4e van groep 1. 2000/2001