Examen Analyse IV — Tweede zittijd 1999–2000
Tweede Kandidatuur Wiskunde
Groep B

1. Stel X en Y twee genormeerde ruimten (over eenzelfde veld $\mathbb{K}$), en beschouw de vectorruimte $\mathcal{L}(X;Y)$ van continue lineaire afbeeldingen $u : X \to Y$. Toon aan hoe men een norm kan definiëren op deze ruimte van lineaire afbeeldingen, en bewijs dat $\mathcal{L}(X;Y)$ compleet is indien Y compleet is.

Beschouw het geval waarbij $Y := \mathbb{R}$ en $X := \mathcal{C}(\Omega;\mathbb{R})$, de vectorruimte van alle continue functies $f : \Omega \to \mathbb{R}$, met $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ een gegeven compacte deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. Stel $u : \mathcal{C}(\Omega;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ de lineaire afbeelding gegeven door

$$u(f) := \int_\Omega f(x)\,dx, \qquad \forall f \in \mathcal{C}(\Omega;\mathbb{R}).$$

Toon aan dat u continu is wanneer men in $\mathcal{C}(\Omega;\mathbb{R})$ de norm $\|f\| := \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$ gebruikt; waaraan is $\|u\|$ dan gelijk? Is u ook nog continu wanneer men in $\mathcal{C}(\Omega;\mathbb{R})$ de norm

$$\|f\|_1 := \int_\Omega |f(x)|\,dx$$

gebruikt? Waaraan is desgevallend de norm $\|u\|$ dan gelijk?

2. Stel X en Λ twee Banachruimten, $\omega \subset \Lambda$ open, $0 \le k < 1$, en $f : X \times \omega \to X$ een continu afleidbare afbeelding zodanig dat

$$\|f(x,\lambda) - f(y,\lambda)\| \le k\|x-y\|, \qquad \forall x,y \in X,\ \forall \lambda \in \omega.$$

Wegens de contractiestelling bestaat er voor elke $\lambda \in \omega$ een uniek element $x = x^*(\lambda) \in X$ zodanig dat $f(x,\lambda) = x$. Toon aan dat de afbeelding $x^* : \omega \to X$, $\lambda \mapsto x^*(\lambda)$ continu afleidbaar is.

3. Stel $\varphi : M \to M'$ een homeomorfisme van een metrische ruimte (M,d) op een metrische ruimte (M',d'). Toon aan dat dan voor elke deelverzameling $A \subset M$ het volgende geldt:

$$\varphi(\mathrm{inw}(A)) = \mathrm{inw}(\varphi(A)), \qquad \varphi(\mathrm{afsl}(A)) = \mathrm{afsl}(\varphi(A)) \qquad \text{en} \qquad \varphi(\partial A) = \partial(\varphi(A)).$$

Beschouw het voorbeeld waarbij $M = \overline{\mathbb{R}}$ (de uitgebreide reëele rechte), $M' = [-1,1]$ met de klassieke afstand, en $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \to [-1,1]$ de isometrie welke gebruikt wordt om de afstand d op $\overline{\mathbb{R}}$ te definiëren. Geef de expliciete formule voor φ, en contoleer vervolgens het voorgaande algemene resultaat voor de deelverzameling $A := \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 0\} \subset \overline{\mathbb{R}}$.