Examen Projectieve Meetkunde (theorie), 15 januari 2017

Deel I

Vraag 1. Onderstel dat V een vectorruimte is over een veld $\mathbb{F}$ met $\dim(V) \geq 2$. Stel $N = \{\gamma \in \mathsf{\Gamma L}(V) \mid \langle \bar{v}^\gamma \rangle = \langle \bar{v} \rangle,\ \forall \bar{v} \in V\}$. Toon aan dat N gelijk is aan $\mathsf{Sc}(V)$, de verzameling der scalaire lineaire afbeeldingen van V op zichzelf.

Vraag 2. Onderstel dat V een 2-dimensionale vectorruimte is over een veld $\mathbb{F}$. Beschouw punten p_1, p_2, p_3 en p_4 in $\mathrm{PG}(V)$, waarbij p_1, p_2 en p_3 twee aan twee verschillend zijn. Wat verstaat men onder de dubbelverhouding $(p_1, p_2; p_3, p_4)$ van de punten p_1, p_2, p_3 en p_4? Is (u_i, v_i) met $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ een stel homogene coördinaten van p_i t.o.v. een vaste basis van V, toon dan aan dat

$$(p_1, p_2; p_3, p_4) = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_4 & v_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_4 & v_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}}.$$

Vraag 3. Onderstel dat β een orthogonale polariteit is van het projectief vlak $\mathrm{PG}(V)$, waarbij V een 3-dimensionale vectorruimte is over een veld $\mathbb{F}$ waarvan de karakteristiek verschillend is van 2. Noem C de kegelsnede bestaande uit alle absolute punten van β. Als $C \neq \emptyset$, toon dan aan dat

$$C = \{(0, 0, 1)\} \cup \{(1, y, y^2) \mid y \in \mathbb{F}\}$$

ten opzichte van een bepaalde goed gekozen basis van V.

Vraag 4.

(a) Onderstel dat V een vectorruimte is van dimensie $n \geq 2$ over een veld $\mathbb{F}$. Wat verstaat men onder de projectieve groep, de kleine projectieve groep en de unimodulaire groep van de projectieve ruimte $\mathrm{PG}(V)$?

(b) Onderstel dat V een vectorruimte is van dimensie 3 over een veld $\mathbb{F}$ van karakteristiek 2. Wat verstaat men onder het begrip *kern* van een niet-ledige absoluut irreducibele kegelsnede C van $\mathrm{PG}(V)$? Hoe kan men de coördinaten van de kern verkrijgen uit de kwadratische vergelijking die C beschrijft? Als p de kern is en L een rechte door p, wat zijn dan de mogelijkheden voor $|L \cap C|$?

(c) Wat verstaat men onder een directe som van projectieve ruimten?

(d) Neem twee Griekse vlakken $\pi_g^{(1)}$, $\pi_g^{(2)}$, en twee Latijnse vlakken $\pi_l^{(1)}$, $\pi_l^{(2)}$ op de Klein kwadriek $\mathcal{K}$ van $\mathrm{PG}(5,\mathbb{F})$. Geef de mogelijkheden voor volgende doorsnijdingen: $\pi_g^{(1)} \cap \pi_g^{(2)}$, $\pi_l^{(1)} \cap \pi_l^{(2)}$, $\pi_g^{(1)} \cap \pi_l^{(1)}$. Met welke verzameling rechten van $\mathrm{PG}(3,\mathbb{F})$ correspondeert elk van deze doorsnijdingen? Hoeveel vlakken liggen er op $\mathcal{K}$ als $\mathbb{F}$ het eindig veld $\mathbb{F}_q$ met q elementen is?

Deel II

Vraag 5.

(a) Onderstel dat $\mathcal{P}$ een projectief vlak is. Voer coördinaten in voor $\mathcal{P}$ (voeg verklarende tekeningen toe!).

(b) Definieer de begrippen *affien vlak* en *projectief vlak*. Wat is, bij definitie, een *isomorfisme* tussen projectieve vlakken? Onderstel dat $\gamma : \mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}'$ een isomorfisme is tussen de projectieve vlakken $\mathcal{P}$ en $\mathcal{P}'$. Construeer het affiene vlak $\mathcal{P}^L$, waarbij L een willekeurige rechte is van $\mathcal{P}$. Is het beeld van $\mathcal{P}^L$ onder γ ook een affien vlak? (Leg kort uit.)

(c) Onderstel dat T een groep is, I een verzameling met $|I| \geq 3$, en $\{T_i \mid i \in I\}$ een verzameling deelgroepen van T zodat $\cup_{j\in I} T_j = T$. Onderstel ook dat voor alle $i, j \in I$ met $i \neq j$, $T_iT_j = T$ en $T_i \cap T_j = \{1\}$.

(i) Onderstel dat $g \in T$, en beschouw een linkse nevenklasse hT_r, met $r \in I$ en $h \in T$, waarvoor $g \notin hT_r$. Bewijs dat er juist één linkse nevenklasse xT_k bestaat (met $k \in I$ en $x \in T$) die g bevat en disjunct is met hT_r.

(ii) Bewijs dat T abels is.

Examen Oefeningen Projectieve Meetkunde

15 januari 2018

Oefening 1. Beschouw de puntenverzameling C in $PG(3,q)$ met vergelijking $X_0^2 + X_1X_2 = 0$.

(i) Bewijs dat C bestaat uit de punten die gelegen zijn op $q+1$ rechten door een vast punt P en leid daaruit af dat C bestaat uit q^2+q+1 punten.

(ii) Bewijs dat een vlak, niet door P, de puntenverzameling C in een irreducibele kegelsnede snijdt.

Oefening 2. Beschouw een symplectische polariteit ϕ in $PG(2n+1,q)$. Een deelruimte X wordt absoluut genoemd als X bevat is in X^ϕ of X^ϕ bevat is in X.

(i) Bewijs dat de rechte bepaald door de punten P en Q absoluut is als en slechts als Q in P^ϕ ligt.

(ii) Zij α een absolute $k-1$-dimensionale ruimte in $PG(2n+1,q)$, $k \leq n$. Bewijs dat een k-dimensionale deelruimte β in $PG(2n+1,q)$ door α absoluut is als en slechts als $\beta \subset \alpha^\phi$.

(iii) Zij nu $n=2$, hoeveel absolute rechten gaan er door een vast punt van $PG(5,q)$? Hoeveel absolute vlakken gaan door een vast punt van $PG(5,q)$?

Oefening 3. Beschouw de projectieve ruimte PG(n,q). Zij L en M disjuncte rechten, hoeveel rechten in $PG(n,q)$ zijn disjunct aan beide rechten?