Examen Analyse IV — Eerste zittijd 1999–2000
Tweede Kandidatuur Wiskunde
Groep 4

1. Stel $f : M \to M'$ een continue afbeelding tussen twee metrische ruimten (M,d) en (M',d'), en stel $A \subset M$ een compacte deelverzameling van M. Toon aan dat er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat

$$d'(f(x), f(y)) < \varepsilon, \qquad \forall x \in A,\ \forall y \in B(x;\delta).$$

Leid hieruit af dat f gelijkmatig continu is indien M compact is. Gebruik dit resultaat ook om het volgende te bewijzen.

Stel $I \subset \mathbb{R}$ een compact interval, X en Y twee Banachruimten, en $f : I \times X \to Y$ een continue afbeelding. Dan bestaat er voor elke continue afbeelding $\psi : I \to X$ en elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zodanig dat

$$\sup_{t \in I} \|f(t, \psi(t) + x) - f(t, \psi(t))\| < \varepsilon, \qquad \forall x \in X : \|x\| < \delta.$$

2. Stel $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ een compact interval, X en Y reële Banachruimten, $\Omega \subset X$ open en $f : I \times \Omega \to Y$ een continue afbeelding welke continu afleidbaar is naar de tweede veranderlijke. Beschouw dan de afbeelding $g : \Omega \to Y$ gegeven door

$$g(x) := \int_\alpha^\beta f(t,x)\, dt.$$

Toon aan dat g continu afleidbaar is en geef de formule voor de afgeleide.

3. Stel $T > 0$ en beschouw de vectorruimte X van continue afbeeldingen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ welke T-periodiek zijn:

$$f(t+T) = f(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Stel Y de vectorruimte van alle constante afbeeldingen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Toon het volgende aan:

(i) X en Y zijn gesloten deelruimten van de Banachruimte $\mathcal{BC}(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$; ($X$ en Y zijn dus zelf ook Banachruimten; geef de norm);

(ii) Y is een deelruimte van X; geef de dimensie van Y;

(iii) de afbeelding $p : X \to X$ gegeven door

$$p(f)(t) := \frac{1}{T}\int_0^T f(\zeta)\, d\zeta, \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall f \in X,$$

is een continue lineaire afbeelding van X in zichzelf;

(iv) p is een lineaire projectie van X op de deelruimte Y, d.w.z. $p \circ p = p$ en $\mathrm{im}(p) = Y$.

Uit (iii) en (iv) volgt dat $Z := \ker(p)$ een topologisch complement is van Y in X; omschrijf de deelruimte Z. Herhaal tenslotte (iii) en (iv) voor de afbeelding $\tilde{p} : X \to X$ gegeven door

$$\tilde{p}(f)(t) := f(0), \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall f \in X.$$

Dus is ook $\tilde{Z} := \ker(\tilde{p})$ een topologisch complement van Y in Z; omschrijf ook $\tilde{Z}$.

Examen Analyse IV — Eerste zittijd 1999–2000
Tweede Kandidatuur Wiskunde
Groep 3

1. Formuleer en bewijs de stelling van Baire. Gebruik deze stelling om het volgende aan te tonen: als $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een aftelbare collectie is van deelverzamelingen $A_n \subset M$ van een complete metrische ruimte (M, d), en als

$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n,$$

dan bestaat er minstens één $n_0 \in \mathbb{N}$ zodanig dat

$$\mathrm{inw}(\mathrm{afsl}(A_{n_0})) \neq \emptyset.$$

2. Bewijs de volgende versie van de middelwaardestelling:

Stel $I \subset \mathbb{R}$ een open interval, en X een Banachruimte. Stel $f : I \longrightarrow X$ en $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue afbeeldingen welke afleidbaar zijn in I en zodanig dat

$$\|f'(t)\| \leq \varphi'(t), \qquad \forall t \in I.$$

Dan geldt er voor elke $\alpha, \beta \in I$ met $\alpha < \beta$ dat

$$\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leq \varphi(\beta) - \varphi(\alpha).$$

Formuleer (zonder bewijs) een meer algemene versie van de middelwaardestelling waarbij de functies f en φ niet noodzakelijk overal afleidbaar zijn. Gebruik deze veralgemeende versie van de middelwaardestelling om het volgende aan te tonen: als $g : I \to X$ een primitieve is van een continue afbeelding $f : I \to X$ dan is g overal in I afleidbaar en er geldt dat

$$g'(t) = f(t), \qquad \forall t \in I.$$

3. Stel $I := [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ en beschouw de vectorruimte $X := C(I; \mathbb{R})$ van continue functies $f : I \to \mathbb{R}$. Op X beschouwen we de volgende normen:

$$\|f\| := \sup_{t\in I} |f(t)| \qquad \text{en} \qquad \|f\|_1 := \int_{-1}^{1} |f(t)|\, dt, \qquad \forall f \in C(I; \mathbb{R}).$$

Uit de algemene theorie weten we dat $(X, \|\cdot\|)$ een Banachruimte is. Toon het volgende aan:

(i) de identiteitsafbeelding is continu van $(X, \|\cdot\|)$ naar $(X, \|\cdot\|_1)$;
(ii) de identiteitsafbeelding is niet continu van $(X, \|\cdot\|_1)$ naar $(X, \|\cdot\|)$;
(iii) de genormeerde ruimte $(X, \|\cdot\|_1)$ is niet compleet.