

DIFFERENTIAALMEETKUNDE I
EXAMEN - 28.8.2017

Theorie (gesloten boek)

1. Beschouw een kromme $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ met booglengte s als parameter, onderstel dat $0 \in I$ en dat $1/\rho(0) \neq 0$. Zij Σ een oppervlak gegeven door de vergelijking $F(x, y, z) = 0$ en stel $\varphi(s) = F(c(s))$. Men zegt dat c aanraking van n^{de} orde in $c(0)$ heeft met Σ als:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0, \dots, \varphi^{(n)}(0) = 0.$$

- (a) Zij Σ een vlak door $c(0)$. Toon aan dat c aanraking van 2de orde in $c(0)$ heeft met Σ als en slechts als Σ het osculatievlak in het punt $c(0)$ is.
(b) Veronderstel dat Σ een bol is met middelpunt \mathbf{m} en straal a . Toon aan dat c aanraking van 2de orde in $c(0)$ heeft met Σ als en slechts als het middelpunt van Σ gegeven wordt door

$$\mathbf{m} = c(0) + \rho(0)\mathbf{n}(0) + \nu\mathbf{b}(0),$$

met ν een willekeurig getal in \mathbb{R} . Bepaald ook de straal van zo'n bol.

- (c) Zij Σ een bol en onderstel dat de wringing van de kromme $c(s)$ nergens nul wordt. Toon aan dat c aanraking van 3de orde in $c(0)$ heeft met Σ als en slechts als het middelpunt en de straal van de bol Σ gegeven worden door:

$$\mathbf{m} = c(0) + \rho(0)\mathbf{n}(0) + \frac{\rho'(0)}{\tau(0)}\mathbf{b}(0) \quad \text{en} \quad a = \sqrt{\rho(0)^2 + (\rho'(0)/\tau(0))^2}.$$

2. Beschouw een oppervlak $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(q_1, q_2) \rightarrow \sigma(q_1, q_2)$ met meetkundig oppervlak Σ . Noteer de oppervlakennormaal met $\mathbf{N}(q_1, q_2)$. Definieer $L_{ij} = \sigma_{ij} \cdot \mathbf{N}$, $i, j = 1, 2$. Noteer de hoofdkrommingen van het oppervlak met $1/R_1$ en $1/R_2$.

- (a) Toon aan dat N_1 en N_2 raakvectoren zijn. Geef (en bewijs) de uitdrukkingen van N_1 en N_2 als een lineaire combinatie van σ_1 en σ_2 .
(b) De Gausskromming K en de gemiddelde kromming H worden gegeven door $K = 1/(R_1 R_2)$ en $H = (1/R_1 + 1/R_2)/2$. Toon aan dat

$$K = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \quad \text{en} \quad H = \frac{1}{2} \frac{g_{11}L_{22} - 2g_{12}L_{12} + g_{22}L_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

- (c) Beschrijf alle omwentelingsoppervlakken met constante Gausskromming $K = 1$.

Oefeningen (open boek)

1. Zij $c(s)$ een kromme met booglengte als parameter, met kromming $\frac{1}{\rho(s)}$ en wringing $\tau(s)$. Beschouw een nieuwe kromme

$$c_2(u) = \int_0^u sc'(s) ds$$

voor $u > 0$.

- (a) Bereken voor deze nieuwe kromme de kromming $\frac{1}{\rho_2(u)}$ en wringing $\tau_2(u)$, in functie van u , $\frac{1}{\rho(u)}$ en $\tau(u)$.
- (b) Geef een concreet voorbeeld van een vlakke kromme $c_3(t)$ met kromming $\frac{1}{\rho_3(t)} = \frac{1}{t}$.
2. Beschouw het oppervlak in \mathbb{R}^3 gegeven door

$$\sigma(u, v) = (u^3, u^2v, uv^2)$$

met $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ en $v \in \mathbb{R}$.

- (a) Bepaal de eerste en tweede grondvorm van dit oppervlak.
- (b) Bepaal de asymptotische lijnen en toon aan dat deze steeds ook geodetische lijnen zijn.
- (c) Zoek een asymptotische lijn door het punt $P(8, -8, 8)$.