Examen Analyse IV — Tweede zittijd 1998–99
Tweede Kandidatuur Wiskunde
Groep 1

1. Stel $I \subset \mathbb{R}$ een open interval, X een Banachruimte, $f : I \to X$ een continue afbeelding, en $t_0 \in I$. Toon aan dat de afbeelding

$$h : I \longrightarrow X,\ t \longmapsto h(t) := \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds$$

afleidbaar is in elk punt $t \in I$. Waaraan is de afgeleide gelijk? Toon tenslotte ook aan dat

$$\|h(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s)\|\,ds, \qquad \forall t \in I,\ t > t_0.$$

2. Stel M en L metrische ruimten, met M compleet, en stel $f : M \times L \to M$ een continue afbeelding.

(i) Geef de voorwaarde opdat f een gelijkmatige contractie zou zijn.

(ii) Toon het volgende aan: als f een gelijkmatige contractie is dan hangt het unieke fixpunt van de partiële afbeelding $x \mapsto f(x, \lambda)$ op een continue manier af van $\lambda \in L$.

(iii) Stel X een Banachruimte en $A : L \to \mathcal{L}(X)$ een continue afbeelding zodanig dat $\|A(\lambda)\| < 1$ voor alle $\lambda \in L$. Gebruik (ii) om aan te tonen dat de operator $I_X - A(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$ voor elke $\lambda \in L$ een continu invers $(I_X - A(\lambda))^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ heeft, en dat de afbeelding $\lambda \mapsto (I_X - A(\lambda))^{-1}$ continu is.

3. Stel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een gelijkmatig continue functie welke overal afleidbaar is en zodanig dat ook de afgeleide $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelijkmatig continu is. Voor elke begrensde functie $x \in X := \mathcal{B}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ definiëren we dan een nieuwe functie $\Phi(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $\Phi(x) := f \circ x$ te stellen. Bewijs het volgende:

(i) $\Phi(x) \in X$ voor elke $x \in X$ (d.w.z. $\Phi(x)$ is begrensd);

(ii) de afbeelding $\Phi : X \to X$ is gelijkmatig continu.

Vervangt men in het voorgaande f door f' dan volgt er op een gelijkaardige manier dat de afbeelding $\Phi' : X \to X,\ x \mapsto \Phi'(x) := f' \circ x$ gelijkmatig continu is. Toon dan het volgende aan:

(iii) voor elke $x \in X$ vormt de afbeelding $u_x : X \to X$ gegeven door

$$u_x(\tilde{x})(t) := f'(x(t)) \cdot \tilde{x}(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall \tilde{x} \in X$$

een continue lineaire afbeelding, met $\|u_x\| = \|\Phi'(x)\|_X$;

(iv) de afbeelding Φ is afleidbaar in elk punt $x \in X$, met $D\Phi(x) = u_x$.

Leidt hieruit af dat de afgeleide $D\Phi : X \to \mathcal{L}(X)$ gelijkmatig continu is.

variant op die van groep 1 2000/2001