Proefexamen Wiskundige Logica

Master Wiskunde - UGent

December 22, 2008

Kies vijf van de ses opgaven. Hierbij zijn opgave 1 en 2 echter verplicht om te doen. Daarover gaat ook het mondeling. Per opgave zijn 4 punten en dus maximaal 20 punten berijkbaar.

Oefening 1.

1. We noemen een abelse groep G *deelbaar* als en slechts als er geldt:

   $$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall g \in G)(\exists h \in G)(n \cdot h = g).$$

   Toon aan dat de theorie van de deelbare abelse groepen *niet eindig axiomatiseerbaar* is.

2. We noemen een abelse groep G een *torsiegroep* als en slechts als er geldt:

   $$(\forall g \in G)(\exists n \in \mathbb{N})(n \cdot g = 0).$$

   Toon aan dat de theorie van de abelse torsiegroepen *niet axiomatiseerbaar* is.

Oefening 2. Zij $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2 \subseteq ...$ een stijgende rij van modellen en zij T een theorie, waarvoor geldt:

$$\varphi \in T \Rightarrow \varphi = \forall \vec{x}\, \exists \vec{y}\, \psi,$$

met ψ kwantorvrij. Toon aan dat er dan geldt:

$$[(\forall i \in \mathbb{N})(\mathcal{M}_i \models T)] \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_i \models T.$$

Oefening 3. We noemen $P \subseteq \mathbb{R}$ *perfect* als en slechts als $P \neq \emptyset$, P is gesloten en P heeft geen geïsoleerde punten.Toon aan:

1. $|\{B \subseteq \mathbb{R} \mid B \text{ is perfect }\}| = |\mathbb{R}|$;

2. B is perfect $\Rightarrow |B| = |\mathbb{R}|$.

Oefening 4. Zij S een niet-ledige verzameling en $F_0 \subseteq \mathcal{P}(S)$, zodat $\emptyset \notin F_0$ en F_0 gesloten is onder de doorsnede, i.e. $A, B \in F_0 \to A \cap B \in F_0$. Toon aan dat er dan een ultrafilter D over S bestaat, zodat $F_0 \subseteq D$.
(Merk op: Een verzameling D is een *ultrafilter over een niet-ledige verzameling* I als en slechts als D een verzameling van deelverzamelingen van I is, zodat voor alle $X, Y \subseteq I$ volgende uitspraken gelden:

1. $(X \in D \wedge X \subseteq Y) \to Y \in D$;

2. $X, Y \in D \to X \cap Y \in D$;

3. $X \in D \leftrightarrow I \setminus X \notin D$.)

Oefening 5. Maak een bewijsboom voor de volgende equivalentie. Doe dit in 'gedecoreerde' stijl, i.e. vermeld telkens welke regel ($\wedge I$, $\to E$, ...) je toepast. (Veronderstel dat x en y niet behoren tot de vrije variabelen van B en A, respectievelijk.)

$$\vdash (\exists x A(x) \wedge \exists y B(y)) \to \exists x \exists y (A(x) \wedge B(y))$$

Oefening 6. Er zijn tenminste $|\mathbb{R}|$ vele niet-isomorfe aftelbare lineaire ordeningen. Toon aan.
(Hint: Zij $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ een functie, definieer dan $\tau_f := f(0) + \mathbb{Z} + f(1) + \mathbb{Z} + \ldots$ door "achter elkaar leggen" van ordeningen. Er geldt: $f \neq g \Rightarrow \tau_f \neq \tau_g$.)

Veel succes!

Bewijsboom proefexamen

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\exists x A(x) \wedge \exists y B(y)^{3}$}
\RightLabel{$\wedge E$}
\UnaryInfC{$\exists y B(y)$}
\AxiomC{$\exists x A(x) \wedge \exists y B(y)^{3}$}
\RightLabel{$\wedge E$}
\UnaryInfC{$\exists x A(x)$}
\AxiomC{$A(u)^{1}$}
\AxiomC{$B(v)^{2}$}
\RightLabel{$\wedge I$}
\BinaryInfC{$A(u) \wedge B(v)$}
\RightLabel{$\exists I$}
\UnaryInfC{$\exists y (A(u) \wedge B(y))$}
\RightLabel{$\exists I$}
\UnaryInfC{$\exists x \exists y (A(x) \wedge B(y))$}
\RightLabel{$\exists E, 1$}
\BinaryInfC{$\exists x \exists y (A(x) \wedge B(y))$}
\RightLabel{$\exists E, 2$}
\BinaryInfC{$\exists x \exists y (A(x) \wedge B(y))$}
\RightLabel{$\rightarrow I, 3$}
\UnaryInfC{$\exists x A(x) \wedge \exists y B(y) \rightarrow \exists x \exists y (A(x) \wedge B(y))$}
\end{prooftree}
$$

Examen Wiskundige Logica

Master Wiskunde - UGent

Eerste examenperiode 2008-2009
Examen A

Kies vijf van de zes opgaven. Hierbij zijn opgave 1 en 2 echter verplicht om te doen. Daarover gaat ook het mondeling. Per opgave zijn 4 punten en dus maximaal 20 punten te behalen.

Oefening 1. Zij LO de theorie van lineaire ordeningen. Zij T een theorie, die tenminste het symbool $<$ in haar taal bevat en voor die $T \models LO$ geldt. Stel T heeft een oneindig model. Toon aan dat er een model $\mathfrak{M}$ van T bestaat waarin men de rationale getallen ordeningbewarend kan inbedden. Concludeer dat de theorie van de gehele getallen $Th(\mathbb{Z}, <)$ een model heeft waarin men de rationale getallen kan inbedden.

Oefening 2. Zij G een eindig voortgebrachte groep, i.e. $G = \langle g_1, ..., g_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, en $H \subsetneq G$ een deelgroep van G. Dan bestaat er een deelgroep H' die maximaal is ten opzichte van de inclusie en waarvoor geldt

$$H \subseteq H' \subsetneq G.$$

Oefening 3. Zij $\mathcal{C} = \{C_i | i \in I\}$ en $\mathcal{D} = \{D_i | i \in I\}$ families van verzamelingen, zo dat $|C_i| < |D_i|$ voor elke $i \in I$. Toon aan dat dan geldt:

$$\sum_{i \in I} |C_i| < \prod_{i \in I} |D_i|.$$

(Merk op: de som van kardinaliteiten is gedefinieerd via disjuncte unie. Zonder bewijs mag U aannemen dat geldt:

$$\sum_{i \in I} |C_i| \leq \prod_{i \in I} |D_i|.)$$

Oefening 4. We zeggen dat een L-formule positief is als het bevat is in de kleinste collectie van L formules, die de atomaire formules bevat en die gesloten is onder $\wedge, \vee, \forall, \exists$. We zeggen dat $\eta : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ een L-homomorphisme is asa

1. $\eta(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{N}}$,
2. $\eta(f^{\mathfrak{M}}(\vec{m})) = f^{\mathfrak{N}}(\eta(\vec{m}))$,
3. $\vec{m} \in R^{\mathfrak{M}} \Rightarrow \eta(\vec{m}) \in R^{\mathfrak{N}}$.

Hierbij zij $\eta(\vec{m}) := \eta(m_1), \ldots, \eta(m_n)$ als $\vec{m} = m_1, \ldots, m_n$.

Stel dat $\eta : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ is een surjectief L-homomorphisme is, dat $\vec{m} \in \mathfrak{M}$, dat $\varphi(\vec{x})$ L-positief is en dat $\mathfrak{M} \models \varphi(\vec{m})$. Toon aan dat $\mathfrak{N} \models \varphi(\eta(\vec{m}))$.

Oefening 5. Zij T een volledige theorie en $\varphi(\vec{x})$ een L-formule met $T \models \exists\vec{x}\varphi(\vec{x})$. Toon aan dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

1. Er bestaat een positieve kwantorvrije formule $\psi(\vec{x})$ zodat
$$T \models \forall\vec{x}(\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \psi(\vec{x})).$$
2. Voor alle $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models T$ en $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$: Als $\eta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{N}$ een L-homomorfisme is, $\vec{a} \in \mathfrak{A}$ en $\mathfrak{M} \models \varphi(\vec{a})$ dan geldt $\mathfrak{N} \models \varphi(\eta(\vec{a}))$.

Hint voor 2) $\Rightarrow$1). Zij $\Gamma(\vec{v}) := \{\psi(\vec{v}) : \psi$ is positief en kwantorvrij en $T \models \forall\vec{v}(\psi(\vec{v}) \to \varphi(\vec{v}))\}$. Zij $\Sigma := T + \{\neg\psi(\vec{c}) : \psi \in \Gamma\} \cup \{\varphi(\vec{c})\}$ waarbij $\vec{c}$ nieuwe constanten zijn. Toon aan dat Σ geen model heeft en dat daaruit de conclusie volgt. Neem voor het eerste doel aan, om een tegenspraak te bereiken, dat er een model $\mathfrak{M}$ met $\mathfrak{M} \models T$ en een $\vec{m} \in \mathfrak{M}$ bestaan zodat $\mathfrak{M} \models \varphi(\vec{m})$ en $\mathfrak{M} \models \neg\psi(\vec{m})$ voor alle $\psi \in \Gamma$. Zij dan

$$\Sigma' := T \cup \{\neg\varphi(\vec{c})\} \cup \{\theta(\vec{c}) : \mathfrak{M} \models \theta(\vec{m}) \text{ en } \theta(\vec{c}) \text{ positief en kwantorvrij}\}$$

waarbij $\vec{c}$ nieuwe constanten zijn. Toon aan dat Σ' een model $\mathfrak{N}$ heeft. Zij $\mathfrak{A}$ de substructuur van $\mathfrak{M}$ die door $\vec{m}$ wordt gegenereerd. Pas nu 2) toe om een contradictie te bereiken.

Oefening 6. Maak een bewijsboom voor de volgende implicatie. Doe dit in 'gedecoreerde' stijl, i.e. vermeld telkens welke regel ($\wedge I$, $\to E$, ...) je toepast. (Veronderstel dat y niet behoort tot de vrije variabelen van B.)

$$\vdash \forall x(\exists y A(y) \vee B(x)) \leftrightarrow \forall x \exists y(A(y) \vee B(x)).$$

Veel succes!

Bewijsboom examen A

$\leftrightarrow$ wil zeggen $\rightarrow$ en $\leftarrow$, we bewijzen dus beide bomen.

$\rightarrow$:

$$A(v)^1 \;/\; A(v) \vee B(v) \;(\vee I) \;/\; \exists y(A(y) \vee B(v)) \;(\exists I)$$

$$\exists y(A(y) \vee B(v)) \quad \exists y A(y)^2 \;/\; \exists y(A(y) \vee B(v)) \;(\exists E, 1)$$

$$B(v)^2 \;/\; A(v) \vee B(v) \;/\; \exists y(A(y) \vee B(v)) \;(\exists I)$$

$$\forall x(\exists y A(y) \vee B(x))^3 \;/\; \exists y A(y) \vee B(v) \;(\forall I)$$

$$\exists y(A(y) \vee B(v)) \;(\vee E, 2)$$

$$\exists y(A(y) \vee B(v)) \;/\; \forall x \exists y(A(y) \vee B(x)) \;(\forall I)$$

$$\forall x(\exists y A(y) \vee B(x)) \rightarrow \forall x \exists y(A(y) \vee B(x)) \;(\rightarrow I, 3)$$

$\leftarrow$:

$$A(v)^1 \;/\; \exists y A(y) \;(\exists I) \;/\; \exists y A(y) \vee B(v) \;(\vee I)$$

$$B(v)^1 \;/\; \exists y A(y) \vee B(v) \;(\vee I)$$

$$A(v) \vee B(v)^2 \quad \exists y A(y) \vee B(v) \quad \exists y A(y) \vee B(v) \;/\; \exists y A(y) \vee B(v) \;(\vee E, 1)$$

de pet beschrijving mag dus niet!

$$\forall y \exists x (A(y) \vee B(x))^3 \;/\; \exists x(A(y) \vee B(x)) \;(\forall E)$$

$$\exists y A(y) \vee B(v) \;(\exists E, 2)$$

moet zo anders nog ongebonden assumptie

$$\forall I \;/\; \forall x(\exists y A(y) \vee B(x))$$

$$\forall y \exists x(A(y) \vee B(x)) \rightarrow \forall x(\exists y A(y) \vee B(x)) \;(\rightarrow I, 3)$$

zo krijgen we de verkeerde conclusie $\forall y \exists x (A(y) \vee B(x)) \rightarrow \forall x(\exists y A(y) \vee B(x))$ ...

Nu eens net:

$\leftarrow$:

$$A(v)^1 \;/\; \exists y A(y) \;(\exists I) \;/\; (\exists y A(y)) \vee B(v) \;(\vee I)$$

$$B(v)^1 \;/\; (\exists y A(y)) \vee B(v) \;(\vee I)$$

$$A(v) \vee B(v)^2 \quad (\exists y A(y)) \vee B(v) \quad (\exists y A(y)) \vee B(v) \;/\; (\exists y A(y)) \vee B(v) \;(\vee E, 1)$$

$$\forall x \exists y (A(x) \vee B(y))^3 \;/\; \exists y(A(x) \vee B(v)) \;(\forall E)$$

$$(\exists y A(y)) \vee B(v) \;(\exists E, 2)$$

$$(\exists y A(y)) \vee B(v) \;/\; \forall x((\exists y A(y)) \vee B(v)) \;(\forall I)$$

$$\forall x \exists y (A(x) \vee B(y)) \rightarrow \forall x((\exists y A(y)) \vee B(x)) \;(\rightarrow I, 3)$$

Lemma: $\forall$ L-termen met $FV \subseteq \{\vec{x}\}$ geldt: $\eta(t(m_1,\dots,m_n)^M) = t(\eta(m_1),\dots,\eta(m_n))^N$.

Bewijs: * voor constanten: $\eta(c^M) = c^N = c(\eta())^N$.

* voor variabelen: ???

* voor functies $f^M(t_1,\dots,t_n)$: $\eta(f^M(t_1,\dots,t_n)) = f^N(\eta(t_1),\dots,\eta(t_n))$ gegeven.

Oefening oplossing

We bewijzen per inductie:

* $\varphi(\vec{m})$ is $s(\vec{m}) = t(\vec{m})$, ~~dan $M \models \varphi(\vec{m}) \Rightarrow$~~ $M \models s(\vec{m}) = t(\vec{m})$

$$\Rightarrow s(\vec{m})^M = t(\vec{m})^M$$
$$\Rightarrow \eta(s(\vec{m})^M) = \eta(t(\vec{m})^M)$$
$$\Rightarrow s(\eta(\vec{m}))^N = t(\eta(\vec{m}))^N$$
$$\Rightarrow N \models s(\eta(\vec{m})) = t(\eta(\vec{m}))$$

* $\varphi(\vec{m})$ is $R(t_1(\vec{m}),\dots,t_n(\vec{m}))$: $M \models R(t_1(\vec{m}),\dots,t_n(\vec{m}))$

$$\Rightarrow (t_1(\vec{m})^M,\dots,t_n(\vec{m})^M) \in R^M$$
$$\Rightarrow \eta(t_1(\vec{m})^M,\dots,t_n(\vec{m})^M) \in R^N$$
$$\Rightarrow (t_1(\eta(\vec{m}))^N,\dots,t_n(\eta(\vec{m}))^N) \in R^N$$
$$\Rightarrow N \models R(t_1(\eta(\vec{m})),\dots,t_n(\eta(\vec{m})))$$

* $\varphi(m)$ is $\bot$: $M \models \bot$ en $N \models \bot$ zijn vals, en (vals $\Rightarrow$ vals) is waar.

* $\varphi(m)$ is $s(\vec{m}) \vee t(\vec{m})$: $M \models s(\vec{m}) \vee t(m) \Rightarrow M \models s(m) \vee M \models t(m)$

$$\Rightarrow M \models s(\eta(m)) \vee N \models t(\eta(m))$$
$$\Rightarrow N \models s(\eta(m)) \vee t(\eta(m)).$$

* idem voor $\wedge$.

* $\varphi(m)$ is $\forall x\, \psi(x,\vec{m})$: $M \models \forall x\, \psi(x,\vec{m}) \Rightarrow \overbrace{\forall m_0 \in M \text{ is }}^{\text{in woorden best?}} M \models \psi(m_0,\vec{m})$

$$\Rightarrow \forall m_0 \in M \text{ is } N \models \psi(\eta(m_0),\eta(\vec{m}))$$
$$\overset{\text{surjectief}}{\Rightarrow} \forall n_0 \in N \text{ is } N \models \psi(n_0,\eta(\vec{m}))$$
$$\Rightarrow N \models \forall x\, \psi(x,\eta(\vec{m}))$$

* analoog voor $\exists$, maar geen surj nodig.

Examen Wiskundige Logica

Master Wiskunde - UGent

Eerste examenperiode 2008-2009
Examen B

Kies vijf van de zes opgaven. Hierbij zijn opgave 1 en 2 echter verplicht om te doen. Daarover gaat ook het mondeling. Per opgave zijn 4 punten en dus maximaal 20 punten te verkrijgen.

Oefening 1. Zij L een willekeurige taal en laten T_1 en T_2 L-theorien zijn. Veronderstel dat de L-theorie $T_1 \cup T_2$ inconsistent is. Bewijs dat er een L-zin ψ bestaat met $T_1 \models \psi$ en $T_2 \models \neg\psi$. (Hint: Compactheidsstelling.)

Oefening 2. Laten X, Y, Z oneindige verzamelingen zijn en $f : X \to Y$ een surjectieve functie. Bewijs: Als $|Y| \leq |Z|$ en voor elke $y \in Y$ is $|f^{-1}(y)| \leq |Z|$ dan is $|X| \leq |Z|$.

Oefening 3. Stel dat T is een L-theorie die kwantoreliminatie toelaat. Laat $\mathfrak{M}$ een model van T zijn. Zij Δ de verzameling van alle kwantorvrije L-zinnen die waar zijn in $\mathfrak{M}$. Definieer T' door $T' := T \cup \Delta$. Bewijs dat T' volledig (compleet) is.

Oefening 4. Gegeven is een gerichte graaf, met verzameling punten V. Als $x, y \in V$ schrijven we $R(x, y)$ voor de bewering dat er een pijl is van x naar y. Bewijs dat er een deelverzameling A van V bestaat met de eigenschappen:

~~Als de verzameling dea ga~~

1. voor alle $x, y \in A$ met $x \neq y$ geldt niet $R(x, y)$,
2. voor elke $x \in V - A$ is er een $y \in A$ zo dat $R(x, y)$ of $R(y, x)$.

Oefening 5. Stel dat $\mathfrak{A}$ een struktuur is. We noemen $B \subseteq A$ definieerbaar als er een L-formule φ en elementen $a_1, \ldots, a_n \in A$ bestaan met $B = \{b \in A : \mathfrak{A} \models \varphi(b, a_1, \ldots, a_n\}$. Toon aan dat $\mathbb{R}$ als verzameling niet definieerbaar is in het veld $\mathbb{C}$.
(Hints: De volgende twee uitspraken mag u zonder bewijs gebruiken.

1. Gegeven $c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$, dan bestaan er $r \in \mathbb{R}$ en $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ zodat r en s algebraisch onafhankelijk zijn over $\mathbb{Q}[c_0, ..., c_n]$.

2. Gegeven $c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}$ en $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, met r en s algebraisch onafhankelijk over $\mathbb{Q}[c_0, ..., c_n]$, dan bestaat er een isomorfisme $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, waarvoor geldt:

$$\sigma(c_i) = c_i, i = 0, ..., n \text{ en } \sigma(r) = s.)$$

Oefening 6. Maak een bewijsboom voor de volgende implicatie. Doe dit in 'gedecoreerde' stijl, i.e. vermeld telkens welke regel ($\wedge I$, $\to E$, ...) je toepast. (Veronderstel dat y niet behoort tot de vrije variabelen van A en dat x niet behoort tot de vrije variabelen van B.)

$$(\exists x A(x) \to \forall y B(y)) \leftrightarrow \forall x \forall y (A(x) \to B(y)).$$

Veel succes!