Examen Analyse IV — Eerste zittijd 1998–99
Tweede Kandidatuur Wiskunde
Groep 2

**1.** Geef de definitie van een lokaal compacte metrische ruimte. Toon aan dat een genormeerde ruimte lokaal compact is dan en slechts dan als de gesloten bal $\overline{B}(0;1)$ compact is. Formuleer en bewijs tenslotte de stelling van Riesz in verband met lokaal compacte genormeerde ruimten.

$\Leftrightarrow$ rij-compact

**2.** Bewijs de volgende versie van de middelwaardestelling:

Stel $I \subset \mathbb{R}$ een open interval, en $X$ een Banachruimte. Stel $f : I \longrightarrow X$ en $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue afbeeldingen welke afleidbaar zijn in $I$ en zodanig dat

$\Psi_\varepsilon : \varphi(t) + \varphi(\alpha) + 2\varepsilon(1-$

$$\|f'(t)\| \leq \varphi'(t), \qquad \forall t \in I \setminus D_\delta \cup A_{\varphi\varepsilon}$$

$A_\varepsilon$ : $\|f(t) - f(\alpha)\| \leq \psi($

Dan geldt er voor elke $\alpha, \beta \in I$ met $\alpha < \beta$ dat

$P_\varepsilon$ : $[t_0, t_0 + \delta[ \, \cap [\alpha, \beta] \subset$

$t_0 \in A_\varepsilon$

$$\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leq \varphi(\beta) - \varphi(\alpha).$$

Formuleer (zonder bewijs) een meer algemene versie van de middelwaardestelling waarbij de functies $f$ en $\varphi$ niet noodzakelijk overal afleidbaar zijn. Gebruik deze stelling dan om het volgende aan te tonen: als $g : I \to X$ een primitieve is van een continue afbeelding $f : I \to X$ dan is $g$ overal in $I$ afleidbaar en er geldt dat

$$\boxed{g'(t) = f(t), \qquad \forall t \in I.}$$

apart
niet
mondeling

**3.** Beschouw enerzijds de functie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $\varphi(x) := x^3$, en anderzijds de ruimte $X$ van alle continue $2\pi$-periodieke functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is $2\pi$-periodiek als $f(t + 2\pi) = f(t)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$).

(i) Toon aan dat

$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$\|\lambda x\| = \lambda\|x\|$

$$\|f\| := \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|, \qquad \forall f \in X$$

een norm definieert op $X$, en dat $(X, \|\cdot\|)$ een Banachruimte is. (Hint: bewijs dat $X$ een gesloten deelruimte is van $\mathcal{B}(\mathbb{R};\mathbb{R})$).

(ii) Toon aan dat de afbeelding

$$\Phi : X \longrightarrow X, \; f \longmapsto \Phi(f) := \varphi \circ f$$

continu is. (Toon eerst aan dat voor elke $f \in X$ het beeld $f(\mathbb{R})$ compact is). $\to$ op één of andere manier inluttig!

(iii) Stel $k \in ]0, 1[$ gegeven; zoek dan $r > 0$ zodanig dat de restrictie van $\Phi$ tot $\overline{B}(0;r) \subset X$ een contractie is op $\overline{B}(0;r)$, met contractieconstante $k$. bal in bal

gegeven

(iv) Wat is het unieke fixpunt van $\Phi$ in $\overline{B}(0;r)$? (Hint: zoek de fixpunten van $\varphi$ in $[-r, r]$ en merk op dat de constante functies tot $X$ behoren).

$2\pi$ periodieke f-ies

Examen Analyse IV — Eerste zittijd 1998–99
Tweede Kandidatuur Wiskunde
Groep 4

**1.** Geef de definitie van een hypervlak in een vectorruimte. Formuleer en bewijs de karakterisatie van gesloten hypervlakken in een genormeerde ruimte.

Stel vervolgens $X$ een $n$-dimensionale genormeerde ruimte over $\mathbb{K}$. Toon aan:

(i) $X$ is topologisch isomorf met $\mathbb{K}^n$;

(ii) $X$ is compleet;

(iii) elke lineaire afbeelding $u : X \to Y$ (met $Y$ een tweede genormeerde ruimte over $\mathbb{K}$) is continu.

**2.** Stel $X$ en $\Lambda$ twee Banachruimten, $\rho > 0$, $B_\rho := \{x \in X \mid \|x\| < \rho\}$, $\Omega \subset \Lambda$ open, en $0 \leq k < 1$. Stel $f \in C^1(B_\rho \times \Omega; X)$ zodanig dat

$$\|D_1 f(x,\lambda)\| \leq k, \qquad \forall (x,\lambda) \in B_\rho \times \Omega,$$

en

$$\|f(0,\lambda)\| < \rho(1-k), \qquad \forall \lambda \in \Omega.$$

Toon dan het volgende aan:

(i) $f$ is een gelijkmatige contractie in $B_\rho$;

(ii) voor elke $\lambda \in \Omega$ bestaat er een unieke $x = x^*(\lambda) \in B_\rho$ zodanig dat $f(x,\lambda) = x$ (hier mag je waar nodig de contractiestelling gebruiken, zonder verder bewijs);

(iii) de afbeelding $x^* : \Omega \to B_\rho$ is continu;

(iv) de afbeelding $x^*$ is continu afleidbaar, d.w.z. $x^* \in C^1(\Omega; B_\rho)$.

**3.** Toon aan dat de functies $x \mapsto \sin x$ en $x \mapsto \cos x$ (van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$) gelijkmatig continu zijn. Beschouw vervolgens de Banachruimte $X := \mathcal{B}(X;X)$, en definieer als volgt een afbeelding $\Phi : X \to X$:

$$\Phi(x)(t) := \sin x(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in X.$$

Toon het volgende aan:

(i) de afbeelding $\Phi$ is gelijkmatig continu;

(ii) voor elke $x \in X$ vormt de afbeelding $u_x : X \to X$ gegeven door

$$u_x(\tilde{x})(t) := (\cos x(t)) \cdot \tilde{x}(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \forall \tilde{x} \in X,$$

een continue lineaire afbeelding;

(iii) de afbeelding $\Phi$ is afleidbaar in elk punt $x \in X$, met $D\Phi(x) = u_x$;

(iv) de afbeelding $D\Phi : X \to \mathcal{L}(X)$ is gelijkmatig continu.

variant op die van groep 1 2000/2001