Examen Analyse IV — Tweede zittijd 1996–97
Tweede Kandidatuur Wiskunde
Groep 1

1. Stel M en L twee metrische ruimten. Toon aan dat een afbeelding $f : M \to L$ continu is dan en slechts dan als voor elke open $U \subset L$ het invers beeld $f^{-1}(U)$ open is in M. Gebruik deze eigenschap om aan te tonen dat f altijd continu is als M een discrete metrische ruimte is.

2. Stel $\Omega \subset X$ een open deelverzameling van een Banachruimte X, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ een continue functie, en $x_0 \in \Omega$ een lokaal maximum van f. Toon dan het volgende aan:

(i) als f afleidbaar is in het punt x_0, dan is $Df(x_0) = 0$;
(ii) als f tweemaal continu afleidbaar is in Ω dan is ook

$$D^2 f(x_0) \cdot (x, x) \leq 0, \qquad \forall x \in X; \tag{1}$$

Veronderstel omgekeerd dat $x_0 \in \Omega$ zodanig is dat $Df(x_0) = 0$, en dat er een $c > 0$ bestaat zodanig dat

$$D^2 f(x_0) \cdot (x, x) \leq -c\|x\|^2, \qquad \forall x \in X. \tag{2}$$

Toon aan dat x_0 dan een strikt lokaal maximum is van f.
Bewijs tenslotte dat als X eindig-dimensionaal is men de voorwaarde (2) kan vervangen door

$$D^2 f(x_0) \cdot (x, x) < 0, \qquad \forall x \in X, x \neq 0. \tag{3}$$

3. Beschouw in de Banachruimte $X := C([0,2]; \mathbb{R})$ een rij $(x_n)_{n \geq 1}$ gedefinieerd door

$$x_n(t) := \begin{cases} nt, & 0 \leq t \leq 1/n, \\ 2 - nt, & 1/n \leq t \leq 2/n, \\ 0, & 2/n \leq t \leq 2. \end{cases}$$

t vast

Toon aan dat er een element $x_0 \in X$ bestaat zodanig dat $\lim_{n \to \infty} x_n(t) = x_0(t)$ voor alle $t \in [0, 2]$.
Vormt de rij (x_n) een Cauchy-rij in X? Convergeert de rij (x_n) in de Banachruimte X?
(Geef een gedetailleerde uitleg bij elk van uw antwoorden).

conv. met norm v.d
Banachruimte