Examen Analyse IV — Eerste zittijd 1996–97
Tweede Kandidatuur Wiskunde
Groep 3

1. Stel M en L twee metrische ruimten. Toon aan dat een afbeelding $f : M \longrightarrow L$ continu is dan en slechts dan als voor elke open $U \subset L$ het invers beeld $f^{-1}(U)$ open is in M.
Gebruik deze eigenschap om aan te tonen dat f altijd continu is als M een discrete metrische ruimte is.

2. Bewijs de volgende versie van de middelwaardestelling:

Stel $I =]\alpha, \beta[\subset \mathbb{R}$ een begrensd open interval, en X een Banachruimte. Stel $f : \bar{I} \longrightarrow X$ en $\varphi : \bar{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue afbeeldingen welke afleidbaar zijn in I en zodanig dat

$$\|f'(t)\| \leq \varphi'(t), \quad \forall t \in I.$$

Dan geldt er dat

$$\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leq \varphi(\beta) - \varphi(\alpha).$$

Hint: gebruik (voor $\epsilon > 0$) de hulpfunctie:

$$\psi_\epsilon(t) := \varphi(t) - \varphi(\alpha) + \epsilon(t - \alpha) + \epsilon, \quad (t \in \bar{I}).$$

3. Stel (M, d) een complete metrische ruimte, en stel $f : M \longrightarrow M$ een continue afbeelding van M in zichzelf. We definieren $f^p : M \longrightarrow M$ $(p \in \mathbb{N})$ op een iteratieve manier, als volgt:

$$f^0(x) := x, \quad f^1(x) := f(x), \quad f^{p+1}(x) := f(f^p(x)), \qquad \forall x \in M,\ \forall p \geq 1.$$

Veronderstel dat er een $p \geq 1$ bestaat zodanig dat f^p een contractie is op (M, d), met contractieconstante $k \in]0, 1[$. Toon dan het volgende aan:

(i) de afbeelding f heeft een uniek fixpunt $x^* \in M$;
(ii) voor elke $x_0 \in M$ convergeert de rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} := (f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ naar x^*.

Ga hierbij als volgt te werk:

(a) Stel $\kappa := \sqrt[p]{k}$, en definieer een nieuwe afstand d^* op M door

$$d^*(x, y) := \sum_{j=0}^{p-1} \kappa^{-j} d(f^j(x), f^j(y)), \qquad \forall x, y \in M.$$

Toon aan dat f een contractie is in (M, d^*), met contractieconstante κ. Besluit hieruit dat f hoogstens één fixpunt heeft.

(b) Kies een $x_0 \in M$, en beschouw de corresponderende rij (x_n); toon aan dat dit een Cauchy-rij is in (M, d^*). Gebruik de ongelijkheid $d(x, y) \leq d^*(x, y)$ om hieruit te besluiten dat (x_n) ook een Cauchy-rij is in (M, d).

(c) Gebruik (b) en de continuiteit van f om (i) en (ii) te bewijzen.

Examen Analyse IV — Eerste zittijd 1996–97
Tweede Kandidatuur Wiskunde
Groep 5

1. Stel $f : M \to L$ een continue afbeelding tussen twee metrische ruimten (M, d_M) en (L, d_L). Toon dan het volgende aan:

(i) als M compact is dan is f gelijkmatig continu;

(ii) als $K \subset M$ een compacte deelverzameling is van M dan bestaat er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ zodanig dat $d_L(f(x), f(y)) < \epsilon$ als $x \in K$, $y \in M$ en $d_M(x, y) < \delta$.

2. Bewijs de stelling van Riesz: een genormeerde ruimte X is lokaal compact dan en slechts dan als X eindig-dimensionaal is.

3. Stel $I \subset \mathbb{R}$ een compact interval, X en Y twee Banachruimten, en $f : X \to Y$ een continue afbeelding. Definieer een afbeelding $F : \mathcal{C}(I, X) \to \mathcal{C}(I, Y)$ door:

$$F(x)(t) := f(x(t)), \quad \forall x \in \mathcal{C}(I, X),\ \forall t \in I.$$

Toon aan:

(i) de afbeelding F is continu;

(ii) als f continu afleidbaar is, dan is ook F continu afleidbaar, met

$$(DF(x_0) \cdot \tilde{x})(t) = Df(x_0(t)) \cdot \tilde{x}(t), \quad \forall x_0, \tilde{x} \in \mathcal{C}(I, X),\ \forall t \in I.$$

Ter herinnering: $\mathcal{C}(I, X)$ is de Banachruimte van alle continue (en dus ook begrensde) afbeeldingen $x : I \to X$.
(Hint: bewijs dat er voor elke $x_0 \in \mathcal{C}(I, X)$ en voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat

$$\sup_{t \in I} \|f(x_0(t) + x) - f(x_0(t))\| \leq \epsilon$$

voor alle $x \in X$ met $\|x\| \leq \delta$).