Examen Analyse IV — Tweede zittijd 1995–96
Tweede Kandidatuur Wiskunde

1. Formuleer en bewijs de stelling van Riesz in verband met het lokaal compact zijn van een genormeerde ruimte X.

2. Stel $I := [\alpha, \beta]$ een compact interval, X een Banachruimte, en $f : I \longrightarrow X$ een gereguleerde functie.
Toon dan aan dat ook de functie

$$\|f\| : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \|f(t)\|$$

gereguleerd is, en dat

$$\left\| \int_\alpha^\beta f(t)\, dt \right\| \leq \int_\alpha^\beta \|f(t)\|\, dt \leq (\beta - \alpha) \sup_{t \in I} \|f(t)\|.$$

3. Stel $I := [0,1]$ en $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ een reëelwaardige functie zodanig dat

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|, \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

voor een zekere $K \geq 0$. Toon aan dat er dan voor elke continue functie $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ een unieke functie $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat

$$x(t) = y(t) + \int_0^t f(x(s))\, ds, \qquad \forall t \in I.$$

Ga hierbij als volgt te werk:

(i) Beschouw de Banachruimte $X := C^0(I, \mathbb{R})$ met de supremumnorm, kies een $y \in X$ en definieer $F : X \longrightarrow X$ door

$$F(x)(t) := y(t) + \int_0^t f(x(s))\, ds, \qquad \forall t \in I,\ \forall x \in X;$$

definieer voor elke $n \geq 1$ de afbeelding $F^n : X \longrightarrow X$ via het iteratieve schema

$$F^1(x) := F(x),\ F^{n+1}(x) := F(F^n(x)), \qquad \forall n \geq 1,\ \forall x \in X;$$

(ii) toon door inductie aan dat voor alle $t \in I$ en voor alle $n \geq 1$ geldt dat

$$|F^n(x_1)(t) - F^n(x_2)(t)| \leq \frac{K^n t^n}{n!} \|x_1 - x_2\|, \qquad x_1, x_2 \in X;$$

(iii) besluit uit (ii) dat er een $m \geq 1$ bestaat zodat F^m een contractie is op X; toon aan hoe hieruit volgt dat er een uniek element $x \in X$ bestaat zodat $x = F(x)$.

Kan men deze oplossing x ook via iteratie benaderen? Dit wil zeggen: geldt er dat $x = \lim_{n\to\infty} F^n(x_0)$, voor een willekeurige $x_0 \in X$?

C