EXAMEN LINEAIRE ALGEBRA
EN MEETKUNDE I

Theorie

Opgave 1. In deze opgave wordt gevraagd om een aantal argumenten of overgangen uit de cursusnota's in detail te verklaren.

In delen (a)–(b) peilen we naar het inzicht in het bewijs van Gevolg 2.2.9, p. 45.

(a) In het bewijs van (i) staat dat $T = \{v\}$ een lineair onafhankelijke verzameling is. Leg dit uit aan de hand van Definitie 2.1.18.

(b) In het bewijs van (ii) staat: "Als $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$ basissen zijn voor V dan volgt uit Lemma 2.2.6 zowel $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{B}'|$ als $|\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}|$". Verklaar dit.

In delen (c)–(f) peilen we naar het inzicht in het bewijs van de stelling van Cayley–Hamilton (Stelling 5.4.9, p. 120).

(c) Verklaar de vierde en vijfde lijn van het bewijs. Met andere woorden, leg uit waarom het feit dat de elementen van de adjunctmatrix determinanten zijn van $(n-1)\times(n-1)$-deelmatrices van $xI - A$, impliceert dat iedere $p_{ij}(x) \in K[x]$ een veelterm is met $\deg p_{ij}(x) \leq n-1$.

(d) Onderaan p. 120 staat:

$$(p_{ij}(x)) = B_{n-1}x^{n-1} + B_{n-2}x^{n-2} + \cdots + B_1 x + B_0.$$

Stel dat $(p_{ij}(x))$ gelijk zou zijn aan de matrix

$$(p_{ij}(x)) = \begin{pmatrix} x^2+2x+3 & x+4 & x+7 \\ 2 & x^2+x-7 & 5x-1 \\ 4x+6 & x-5 & x^2-3 \end{pmatrix},$$

waaraan is B_{n-2} dan gelijk?

(e) Op p. 121, vijfde en zesde lijn, staat er

$$\det(xI-1)I = (xI-A)\operatorname{adj}(xI-A).$$

Waarom geldt deze gelijkheid?

(f) In het midden van het bewijs van deel (ii) staat:

$$A_{f^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i f^i} = {A_f}^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i {A_f}^i.$$

Verklaar deze gelijkheid.

Oplossing 1. (a) We zien dat de enige eindige niet-lege deelverzameling van T gelijk is aan $\{v\}$. Volgens Definitie 2.1.18 is T dan lineair onafhankelijk als en slechts als uit $\lambda v = 0$ volgt dat $\lambda = 0$. Nu is $v \neq 0$, dus volgt uit $\lambda v = 0$ inderdaad dat $\lambda = 0$.

(b) De verzamelingen $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$ zijn elk lineair onafhankelijk en voortbrengend want ze zijn een basis. Neem nu $\mathcal{B}'$ als voortbrengde verzameling S in Lemma 2.2.6, en $\mathcal{B}$ als lineair onafhankelijke verzameling dan volgt uit Lemma 2.2.6 dat $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{B}'|$. Neem dan $\mathcal{B}$ als voortbrengde verzameling S in Lemma 2.2.6, en $\mathcal{B}'$ als lineair onafhankelijke verzameling dan volgt opnieuw uit Lemma 2.2.6 dat $|\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}|$.

(c) We beschouwen een determinant van een $(n-1)\times(n-1)$-deelmatrix van $xI - A$. Deze determinant is een som van termen waarbij elke term een product is van $n-1$ factoren. Elk van deze factoren is een element van de matrix $xI - A$, en is dus lineair in x (want ofwel gelijk aan $-a_{ij}$ ofwel gelijk aan $x - a_{kk}$). Een product van $(n-1)$ lineaire factoren kan hoogstens graad $(n-1)$ hebben, en dus $p_{ij}(x)$, wat de som is van dergelijke producten, ook.

(d) We zien dat $n = 3$, dus we zoeken B_1. Die is gelijk aan

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) Dit volgt uit de opmerking pagina 118. Die zegt namelijk dat Stelling 5.3.13(i), $A\,\mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A)A = (\det A)I$ ook geldt voor matrices A met coëfficiënten in $K[X]$.

(f) We zullen aantonen dat (1) $A_{fg} = A_f\,A_g$, en (2) $A_{\lambda f + \mu g} = \lambda A_f + \mu A_g$. Hieruit volgt dan dat

$$A_{f^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i f^i} = {A_f}^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i {A_f}^i.$$

De eerste gelijkheid volgt uit Stelling 5.1.8(ii) en het feit dat $fg = f \circ g$. In het bewijs van Stelling 5.1.8(i) hebben we (2) aangetoond.

Opgave 2. Zijn volgende uitspraken juist of fout? Indien juist, geef een argument; indien fout, geef een tegenvoorbeeld. (Enkel “juist” of “fout” antwoorden zonder verklaring levert je geen punten op.)

(a) Zij v_1, v_2, v_3, v_4 vier verschillende vectoren in een K-vectorruimte V die *twee aan twee* lineair onafhankelijk zijn, d.w.z. elk paar $\{v_i, v_j\}$ is lineair onafhankelijk (maar niet noodzakelijk $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ lineair onafhankelijk). Als $\operatorname{span}(v_1, v_2) \cap \operatorname{span}(v_3, v_4) \neq 0$, dan is ook $\operatorname{span}(v_1, v_3) \cap \operatorname{span}(v_2, v_4) \neq 0$.

(b) Zij V een K-vectorruimte en zij $f \in \operatorname{End}(V)$ een lineaire operator. Dan is $V = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$.

(c) Zij $A \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ en $V = \mathbb{R}^n$. Beschouw de afbeelding

$$f\colon V \to \mathbb{R}\colon v \mapsto v^t A v.$$

Dan is $f \in V^*$.

(d) Zij $A \in \mathsf{GL}_n(K)$ met $A^2 = I$. Dan is de eigenruimte van L_A behorend bij de eigenwaarde 1 gelijk aan $\operatorname{im}(L_{A+I})$.

(e) Zij H_1 and H_2 twee parallelle hypervlakken in $\mathbb{R}^n$, zeg $H_1 = v_1 + H_0$ en $H_2 = v_2 + H_0$. Dan is de verzameling van punten p waarvoor $\operatorname{dist}(p, H_1) = \operatorname{dist}(p, H_2)$ gelijk aan het hypervlak $H_3 = \frac{v_1+v_2}{2} + H_0$.

Oplossing 2. (a) Juist. Uit het gegeven $\operatorname{span}(v_1, v_2) \cap \operatorname{span}(v_3, v_4) \neq 0$ volgt dat er een niet-nul vector w en $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in K$, bestaan zodat $w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4$. Dus is $\lambda_1 v_1 - \lambda_3 v_3 = \lambda_4 v_4 - \lambda_2 v_2$. Stel $w' = \lambda_1 v_1 - \lambda_3 v_3$, dan is w' bevat in $\operatorname{span}(v_1, v_3) \cap \operatorname{span}(v_2, v_4)$, en $w' \neq 0$ omdat v_1 en v_3 lineair onafhankelijk zijn.

(b) Fout. Een tegenvoorbeeld wordt bv. gegeven door de shift-operator

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dan is $\ker f = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ en $\operatorname{im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Dan is duidelijk $V \neq \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$, want $\ker(f) \cap \operatorname{im}(f) \neq 0$.

(c) Fout. Kies bijvoorbeeld $A = I_n$. Voor elke $v \in V$ geldt $f(2v) = 4f(v) \neq 2f(v)$ zodra $f(v) \neq 0$, en zo’n v bestaat uiteraard (kies bv. $v = e_1$). (Elke mogelijke $A \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ zal hier zelfs een tegenvoorbeeld zijn.)

(d) We tonen de gelijkheid aan door beide inclusies aan te tonen. We bewijzen eerst dat $\ker(L_{A-I}) \leq \operatorname{im}(L_{A+I})$. Neem een vector v in $\ker(L_{A-I})$, dan is $Av = v$ en dus ook $(A + I)(\frac{1}{2}v) = v$. Dit wil zeggen dat $v \in \operatorname{im}(L_{A+I})$.

Omgekeerd, zij v in $\operatorname{im}(L_{A+I})$, dan is er een w zodat $(A+I)w = v$, dit wil zeggen dat $Aw + w = v$, of als we links vermenigvuldigen met A, dat $A^2 w + Aw = Av$. Nu is $A^2 = I$, dus volgt er dat $w + Aw = Av$.

Maar $Aw + w = v$, dus is $v = Av$ en behoort v tot $\ker(L_{A-I})$. Er volgt dus ook dat $\mathrm{im}(L_{A+I}) \leq \ker(L_{A-I})$.

(e) Zij n een normaalvector van H_1, dan heeft H_1 vergelijking $n(v-v_1) = 0$. Nu is H_1 parallel aan H_2, dus zegt Lemma 7.4.3 dat elke normaalvector van H_2 een veelvoud is van n. We mogen dus n als normaalvector voor H_2 kiezen. De afstand van een punt P met plaatsvector v tot H_1 wordt gegeven door $\frac{|nv-nv_1|}{\|n\|}$, de afstand van P tot H_2 wordt gegeven door $\frac{|nv-nv_2|}{\|n\|}$. Uitdrukken dat beide gelijk moeten zijn levert dat $|nv - nv_1| = |nv - nv_2|$. Een eerste mogelijkheid is dat $nv - nv_1 = nv - nv_2$, of dus $v_1 = v_2$, maar dan zijn H_1 en H_2 gelijk, wat niet de bedoeling is. Dus is $nv - nv_1 = -nv + nv_2$, of nog $nv = n(v_1 + v_2)/2$. Dit is een vergelijking van het hypervlak H_3.

Opmerking. *Bij (e) was het de bedoeling van de opgave dat de hypervlakken H_1 en H_2 verschillend zouden zijn, maar dit werd per ongeluk vergeten in de opgave. Hier werd voor de quotering geen rekening mee gehouden, m.a.w., wie als oplossing schreef "Fout, want als $H_1 = H_2$ dan liggen alle punten even ver van H_1 als van H_2" kreeg uiteraard ook alle punten toegekend voor dit deeltje.*

Opgave 3. (5 punten) Gegeven de lineaire afbeelding

$$f\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3 \colon (x,y,z)^t \mapsto (x, x+3y, x+az)^t\ ,$$

waarin $a \in \mathbb{Q}$ een parameter is.

(a) Bepaal de matrixvoorstelling A van f ten opzichte van de standaardbasis. Controleer je antwoord door na te rekenen dat $A(x,y,z)^t = f\big((x,y,z)^t\big)$ voor alle $(x,y,z)^t \in \mathbb{Q}^3$.

(b) Voor welke waarden van a is f een bijectieve lineaire afbeelding?

Vanaf hier is $a = 3$.

(c) Bepaal de eigenwaarden en eigenruimten van de matrix A en geef een matrix P waarvoor $P^{-1}AP$ een diagonaalmatrix D is.

(d) Zij B de matrixvoorstelling van f ten opzichte van een bepaalde basis $\mathcal{B}$ voor $\mathbb{Q}^3$. Leg uit waarom de matrices A en D toegevoegd zijn.

Antwoord 3.

(a) We bepalen de beelden van de standaardbasis:

$$f\big((1,0,0)^t\big) = (1,1,1)^t \quad f\big((0,1,0)^t\big) = (0,3,0)^t \quad f\big((0,0,1)^t\big) = (0,0,a)^t$$

Deze beelden zijn juist de coördinaten van de beelden ten opzichte van de standaardbasis, dus dit zijn juist de kolommen van A. We vinden dus

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}\ .$$

We kunnen inderdaad narekenen dat

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+3y \\ x+az \end{pmatrix} = f\big((x,y,z)^t\big).$$

(b) De afbeelding f is bijectief als en slechts als $\det A \neq 0$. Nu is $\det A = 3a$, dus f is inverteerbaar als en slechts als $a \neq 0$.

(c) De karakteristieke veelterm van A is

$$\chi(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ -1 & x-3 & 0 \\ -1 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1)(x-3)^2\ .$$

Dus er zijn twee eigenwaarden: $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 3$, met respectieve algebraïsche multipliciteiten 1 en 2. Voor de eigenruimte bij 1 lossen we het volgende stelsel op:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

We vinden $E_1 = \operatorname{span}\big((-2,1,1)^t\big)$. Voor de eigenruimte bij 2 lossen we het volgende stelsel op:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

We vinden $E_3 = \operatorname{span}\big((0,1,0)^t, (0,0,1)^t\big)$. Bijgevolg is

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{voor } P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Zij Q de transitiematrix van $\mathcal{B}$ naar de standaardbasis. Dan is $A = Q^{-1}BQ$ wegens Stelling 5.2.5. We vinden dus

$$D = P^{-1}AP = P^{-1}Q^{-1}BQP = (QP)^{-1}B(QP) ,$$

dus B is toegevoegd aan D.

Opgave 4. (3,5 punten) Zij $V = \mathbb{R}^3$ een vectorruimte uitgerust met het Euclidisch inproduct $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Zij $w = (1,1,1)^t$ een element van V. Beschouw de afbeelding

$$\varphi : V \to \mathbb{R} : v \mapsto \langle v, w \rangle.$$

(a) Bepaal een orthogonale basis voor V die w bevat.

(b) Geef een basis voor $\ker \varphi$.

(c) Zij $\{e_1, e_2, e_3\}$ de standaardbasis van V en $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ de bijbehorende duale basis. Toon aan dat coördinaatvector van φ tegenover $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ dezelfde is als die van w tegenover $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Antwoord 4. (a) We passen het Gram–Schmidt orthogonalisatieproces toe op de basis $\{w, (1,0,0)^t, (0,1,0)^t\}$. We krijgen de orthogonale basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) De ruimte $\ker \varphi$ bestaat uit alle vectoren die loodrecht staan op w, en is dus $w^\perp$. In (a) hebben we een orthogonale basis voor $\mathbb{R}^3$ opgesteld waarvan w er één is. De twee andere vectoren brengen dus $w^\perp$ voort. We vinden

$$\ker \varphi = \operatorname{span}\big((2/3, -1/3, -1/3)^t, (0, 1/2, -1/2)^t\big) .$$

(c) De coördinaatvector van w tegenover de standaardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ is juist $(1,1,1)^t$. We moeten dus aantonen dat $\varphi = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Maar we hebben voor alle vectoren $(x,y,z)^t$ dat

$$\varphi((x,y,z)^t) = x + y + z = \varepsilon_1((x,y,z)^t) + \varepsilon_2((x,y,z)^t) + \varepsilon_3((x,y,z)^t) ,$$

dus de coördinaatvector van φ tegenover $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ is inderdaad ook $(1,1,1)^t$.

Opgave 5. (1,5 punten) Gegeven $A \in M_3(\mathbb{R})$ en $y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Beschouw het stelsel $Ax = y$ en drie van haar oplossingen: $x_1 = (1,1,3)^t, x_2 = (1,0,3)^t$ en $x_3 = (0,1,3)^t$. Bepaal de oplossingsverzameling van het stelsel $Ax = y$. Motiveer je antwoord.

Antwoord 5. De oplossingsverzameling van $Ax = y$ wordt per definitie gegeven door $x^* + \ker L_A$, waarbij x^* een oplossing is. De ruimte U opgespannen door de vectoren $x_i - x_j$, met $1 \leq i < j \leq 3$, is duidelijk bevat in $\ker L_A$. Een basis voor U wordt gegeven door $\{(0,1,0)^t, (1,0,0)^t\}$, waaruit volgt dat U tweedimensionaal is. Verder is $\dim \ker L_A < 3$, omdat A anders de nul-matrix zou zijn, wat in strijd is met de gegevens (een niet-homogeen stelsel met de nulmatrix als coëfficiëntenmatrix is altijd strijdig). Hieruit halen we dat $U = \ker L_A$ en kunnen we de oplossingsverzameling beschrijven als de affiene ruimte $x_1 + U$.