Examen Analyse IV — Eerste zittijd 1994–95
Tweede Kandidatuur Wiskunde

1. Stel X, Y en Z genormeerde ruimten. Toon aan hoe men de ruimte $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(Y, Z))$ kan identificeren met de ruimte $\mathcal{L}_2(X, Y; Z)$.
Beschrijf in het kort hoe dit resultaat gebruikt wordt in de theorie van hogere afgeleiden van afbeeldingen tussen Banachruimten.

2. Bewijs de volgende versie van de middelwaardestelling:
Stel $I =]\alpha, \beta[\subset \mathbb{R}$ een begrensd open interval, en X een Banachruimte. Stel $f : \bar{I} \longrightarrow X$ en $\varphi : \bar{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue afbeeldingen welke afleidbaar zijn in I en zodanig dat

$$\|f'(t)\| \leq \varphi'(t), \quad \forall t \in I.$$

Dan geldt er dat

$$\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leq \varphi(\beta) - \varphi(\alpha).$$

Hint: gebruik (voor $\epsilon > 0$) de hulpfunctie:

$$\psi_\epsilon(t) := \varphi(t) - \varphi(\alpha) + \epsilon(t - \alpha) + \epsilon, \quad (t \in \bar{I}).$$

3. Stel $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ open, en stel $f : \Omega := \mathbb{R} \times \tilde{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ een continue afbeelding welke continu afleidbaar is naar de tweede veranderlijke, en zodanig dat

$$f(t + T, x) = f(t, x), \quad \forall (t, x) \in \Omega,$$

voor een zekere $T > 0$ (men zegt dat f T-periodiek is). Beschouw de differentiaalvergelijking

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$

en het bijbehorende vraagstuk van Cauchy. Toon aan:

(i) als $\bar{x} : I \longrightarrow \tilde{\Omega}$ een oplossing is van (1), dan is ook

$$\bar{x}_1 : I_1 := \{t - T \mid t \in I\} \longrightarrow \tilde{\Omega},\ t \longmapsto \bar{x}_1(t) := \bar{x}(t + T)$$

een oplossing van (1);

(ii) men heeft voor elke $(t_0, x_0) \in \Omega$ dat

$$J(t_0 + T, x_0) = J(t_0, x_0) + T$$

en

$$\bar{x}(t + T; t_0 + T, x_0) = \bar{x}(t; t_0, x_0), \quad \forall t \in J(t_0, x_0).$$

Leidt hieruit het volgende af: als de beginwaarden $(t_0, x_0) \in \Omega$ zodanig zijn dat $t_0 + T \in J(t_0, x_0)$ en $\bar{x}(t_0 + T; t_0, x_0) = x_0$, dan is $J(t_0, x_0) = \mathbb{R}$ en $\bar{x}(t + T; t_0, x_0) = \bar{x}(t; t_0, x_0)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$ (d.w.z. $\bar{x}(t; t_0, x_0)$ is een T-periodieke oplossing van (1)).