Examen Kwantummechanica

2011-2012, eerste zittijd, 3de Bachelor Wiskunde

27 januari 2010, 08:30, 3 blz.

1 Theorie

1. Gegeven de radiale Schrodigervergelijking van het waterstofatoom:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E+\frac{e^2}{r}\right)\right]R_{E,l}(r)=0. \tag{1}$$

Transformeer naar dimensieloze eenheden met:

$$\rho = \sqrt{\frac{-8\mu E}{\hbar^2}}r \tag{2}$$

$$n = \frac{e^2}{\hbar}\sqrt{\frac{-\mu}{2E}}=\alpha\sqrt{\frac{-\mu c^2}{2E}} \tag{3}$$

en los op. Bespreek het spectrum en zijn degeneratie.

2. Leid de eerste en tweede orde correcties voor de energie af door gebruik te maken van niet-gedegenereerde perturbatietheorie.
Gegeven:

$$\hat{H}=\hat{H}_0+\lambda\hat{V} \tag{4}$$

2 Oefeningen

1. *Supersymmetrische kwantummechanica:*
Beschouw een één-dimensionaal deeltje. De eenheden zijn zo gekozen dat $m=1$ en $\hbar=1$. We voeren operatoren $\widehat{Q}^+$ en $\widehat{Q}^-$ in die in de configuratieruimte worden gegeven door

$$\widehat{Q}^+=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\Phi(x)\right], \qquad \widehat{Q}^-=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\Phi(x)\right].$$

(a) Toon aan dat deze operatoren elkaars hermitisch toegevoegde vormen (dit kan op verschillende manieren).

(b) Bepaal de Hamiltoniaan $\widehat{H}^a=\widehat{Q}^+\widehat{Q}^-$ en zijn supersymmetrische partner $\widehat{H}^b=\widehat{Q}^-\widehat{Q}^+$ in de configuratieruimte.

(c) Bereken ook de commutator $[\widehat{Q}^-,\widehat{Q}^+]$.

(d) Stel dat de eigenfuncties $|\psi_n^a\rangle$ en eigenwaarden E_n^a van de Hamiltoniaan $\widehat{H}^a$ gekend zijn.

- Hoe kan je met behulp van bovenstaande uitdrukking voor $\widehat{H}^a$ aantonen of inzien dat moet gelden dat $E_n^a\geq 0$? (Hetzelfde geldt voor het spectrum van $\widehat{H}^b$.)
- Toon aan dat $\widehat{Q}^-|\psi_n^a\rangle$ een eigenfunctie is van $\widehat{H}^b$ en bepaal de bijbehorende eigenwaarde.

- Bepaal de genormaliseerde eigenvectoren $|\psi_n^b\rangle$ van $\widehat{H}^b$ door bovenstaande uitdrukking $\widehat{Q}^- |\psi_n^a\rangle$ te normaliseren. Bepaal hiertoe eerst de norm van $\widehat{Q}^- |\psi_n^a\rangle$. Hieruit zie je dat dit niet mogelijk is indien $E_n^a = 0$.

Elke eigenwaarde E_n^a van $\widehat{H}^a$ die strikt groter is dan nul, $E_n^a > 0$, treedt ook op in het spectrum van $\widehat{H}^b$, met andere woorden $E_n^b = E_n^a$. Indien het spectrum van één van beide Hamiltonianen gekend is, is dus ook het spectrum van de andere Hamiltoniaan ook bepaald. Daarom worden dit supersymmetrische partners genoemd.

- Kan je nu ook het omgekeerde verband bepalen waarbij een eigenvector $|\psi_n^a\rangle$ van $\widehat{H}^a$ met eigenwaarde $E_n^a > 0$ geschreven wordt met behulp van de eigenvector $|\psi_n^b\rangle$ van $\widehat{H}^b$ en eigenwaarde $E_n^b = E_n^a$?

(e) Toon aan dat $\psi_0^a(x) = \mathcal{N} \exp\left\{-\int \Phi(x)\,\mathrm{d}x\right\}$ een potentiële eigenfunctie van $\widehat{H}^a$ is met eigenwaarde $E_0^a = 0$. Het volstaat hiervoor $\widehat{Q}^- |\psi_0^a\rangle$ te berekenen. Dit is pas echt een eigenfunctie indien ze normeerbaar is, wat enkel voor specifieke keuzes van $\Phi(x)$ het geval zal zijn.
De potentiële $E_0^b = 0$-eigenfunctie voor $\widehat{H}^b$ wordt bekomen door in de exponentiële een + teken te zetten. Indien $\psi_0^a(x)$ normeerbaar is, zal $\psi_0^b(x)$ zeker niet normeerbaar zijn, zodat hooguit één van de twee Hamiltonianen een grondtoestand $E_0 = 0$ kan hebben.

(f) Beschouw tot slot een concreet voorbeeld: $\Phi(x) = \tanh(x)$. Hieruit volgt de voor de Hamiltoniaan $\widehat{H}^b$:

$$\widehat{H}^b = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}.$$

De Hamiltoniaan $\widehat{H}^b$ beschrijft gewoon een vrij deeltje met de energie verschoven over $+1/2$, en heeft dus een gekend spectrum $E_k^b = \frac{1}{2}\left(1 + k^2\right)$ en bijbehorende eigenfuncties $\langle x|\psi_k^b\rangle = (2\pi)^{-1/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$.

- Bepaal ook de Hamiltoniaan $\widehat{H}^a$ voor dit expliciete voorbeeld.
- Bepaal met de techniek uit puntje (d) de strikt positieve eigenwaarden en genormeerde eigenfuncties (expliciete coordinatenrepresentatie) van $\widehat{H}^a$.
- Heeft $\widehat{H}^a$ ook nog een gebonden toestand met $E^a = 0$? Gebruik hiervoor puntje (e) en de uitdrukking $\int \tanh(x)\,\mathrm{d}x = \log\cosh x$. Indien deze toestand normeerbaar is, hoef je de normeringsfactor niet te berekenen.

(g) De potentiaal V^a die opduikt naast de kinetisch energieterm in de Hamiltoniaan $\widehat{H}^a$ in het expliciete voorbeeld uit het vorige puntje staat gekend als een reflectieloze potentiaal, omdat de verstrooiingstoestanden $|\psi_k^a\rangle$ dezelfde waarschijnlijkheidsstroomdichtheid hebben op $-\infty$ als op $+\infty$, en dus geen hinder ondervinden van de potentiaal. Toon dit aan door de waarschijnlijkheidsstroomdichtheid voor $x = -\infty$ en $x = +\infty$ te berekenen voor de eigenfuncties $|\psi_k^a\rangle$.

2. *Stark effect met behulp van tijdsonafhankelijke storingsrekening:*
Beschouw een waterstofatoom met gekende energie-eigenwaarden en eigenfuncties. Dit waterstofatoom wordt nu in een elektrisch veld langsheen de z-as geplaatst, zodat de Hamiltoniaan aangevuld wordt met een storingsterm

$$\widehat{V} = e\mathscr{E}\widehat{z} \tag{5}$$

met $\mathscr{E}$ de elektrische veldsterkte.

(a) Bepaal de verschuiving in de energie E_1 van de grondtoestand $|n, l, m\rangle = |1, 0, 0\rangle$ met behulp van eerste-orde storingsrekening.

(b) Bepaal ook de verschuiving in de energie E_1 van de grondtoestand $|n, l, m\rangle = |1, 0, 0\rangle$ met behulp van tweede-orde storingsrekening. De tweede orde correctie op de grondtoestand bestaat uit een oneindige som waarin de teller steeds positief is en de noemer steeds negatief, zodat elke term een negatieve bijdrage geeft en de totale correctie ook steeds negatief is. Bereken een expliciete ondergrens voor de energieverschuiving als gevolg van het Stark-effect, door de noemer in alle termen te vervangen door een constante, namelijk de grootst mogelijke waarde (het kleinst mogelijke energieverschil in absolute waarde). De noemer kan dan uit de som worden afgezonderd en de oneindige som dient enkel nog over de tellers genomen te worden. Deze som kan dan verder worden uitgerekend.

(c) Bepaal ook de verschuiving en splitsing van de vier ontaarde toestanden $|2,0,0\rangle$, $|2,1,-1\rangle$, $|2,1,0\rangle$ en $|2,1,1\rangle$ met behulp van eerste orde ontaarde storingsrekening.