Kwantummechanica:
examen tweede zittijd 2009–2010

1 Theorie

1.1 Een deeltje in een centrale potentiaal

Geef de afleiding van de radiële golfvergelijking. Herschrijf deze als een eendimensionale Schrödinger-vergelijking en bespreek. Leid het gedrag af bij kleine r.

1.2 Elektromagnetisme

Leid de Schrödingervergelijking af voor een deeltje in een elektromagnetisch veld. Bespreek het ijkprincipe. Gegeven zijn:

$$\vec{F} = e\left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c}\right) ,$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} , \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} .$$

Examen Kwantummechanica: oefeningen

2009-2010, tweede zittijd, 3de Bachelor Wiskunde en 3de Bachelor Fysica en Sterrenkunde

16 augustus 2010, 08:30

1. *Coherente toestanden:*
   Beschouw de harmonische oscillator

$$\widehat{H} = \hbar\omega\left(\widehat{a}^\dagger \widehat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

met $\widehat{a}$ and $\widehat{a}^\dagger$ de annihilatie- en creatie-operatoren, die voldoen aan

$$[\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger] = 1.$$

De eigentoestanden van deze Hamiltoniaan worden gegeven door $\{|n\rangle, n \in \mathbb{N}\}$, met bijbehorende eigenwaarden $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$. Verder geldt

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle, \qquad a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle.$$

(a) Toon aan dat de toestand

$$|\phi_\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

een eigentoestand is van de operator $\widehat{a}$, en bepaal de bijbehorende eigenwaarde. Toon ook aan dat deze toestand correct genormeerd is ($\langle\phi_\alpha|\phi_\alpha\rangle = 1$).

(b) Bepaal de verwachtingswaarden $\langle\phi_\alpha|\widehat{x}|\phi_\alpha\rangle$ en $\langle\phi_\alpha|\widehat{p}|\phi_\alpha\rangle$ met

$$\widehat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}}\left(\widehat{a} + \widehat{a}^\dagger\right) \qquad \widehat{p} = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}}\left(\widehat{a} - \widehat{a}^\dagger\right).$$

(c) Stel dat de harmonische oscillator zich op tijdstip $t = 0$ in de toestand $|\phi_\alpha\rangle$ bevindt: $|\psi(0)\rangle = |\phi_\alpha\rangle$. Bepaal de tijdsgeëvolueerde toestand

$$|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\widehat{H}t} |\psi(0)\rangle$$

en toon aan dat dit nog steeds een eigentoestand is van $\widehat{a}$. Wat is de bijbehorende eigenwaarde op tijdstip t.

(d) Bepaal eveneens $\langle\psi(t)|\widehat{x}|\psi(t)\rangle$ en $\langle\psi(t)|\widehat{p}|\psi(t)\rangle$, en schrijf deze in functie van $x_0 = \langle\psi(0)|\widehat{x}|\psi(0)\rangle$ en $p_0 = \langle\psi(0)|\widehat{p}|\psi(0)\rangle$.
Kan je inzien waarom deze coherente toestanden ook klassieke toestanden genoemd worden?

(e) Pas de Baker-Campbell-Hausdorff formule $\exp(\widehat{A} + \widehat{B}) = \exp(\widehat{A})\exp(\widehat{B})\exp(-[\widehat{A}, \widehat{B}]/2 + \ldots)$ toe om aan te tonen dat

$$|\phi_\alpha\rangle = \exp\left(\alpha\widehat{a}^\dagger - \alpha^*\widehat{a}\right)|0\rangle.$$

De hogere orde bijdragen "..." in de Baker-Campbell-Hausdorff formule vallen weg in dit geval. Herschrijf de creatie- en annihilatie-operatoren in termen van $\widehat{x}$ en $\widehat{p}$, en pas opnieuw de Baker-Campbell-Hausdorff formule toe om de golffunctie $\phi_\alpha(x) = \langle x|\phi_\alpha\rangle$ te bepalen.

2. *Storingsrekening in een diatomische molecule:*
De Hamiltoniaan van een stijve diatomische molecule (geen vibrationele vrijheidsgraden) wordt gegeven door

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{L}^2}{2I} + B\widehat{L}_z + C\widehat{L}_x.$$

waarbij we het geval $C \ll B$ beschouwen.

(a) Beschouw eerst het geval $C = 0$. De sferische harmonieken $|l, m\rangle$ diagonaliseren deze Hamiltoniaan. Bepaal de bijbehorende eigenwaarden $E_{l,m}$. Waarom verwacht je ook een afhankelijkheid van het kwantumgetal m?

(b) Beschouw de term $C\widehat{L}_x$ nu als storingsterm. Bepaal nu de eerste-orde correcties op de golffunctie en de eerste en tweede orde correcties op de energie-eigenwaarden met behulp van tijdsonafhankelijke storingsrekening.
Tip: Herschrijf $\widehat{L}_x$ in termen van de ladder-operatoren $\widehat{L}_+$ en $\widehat{L}_-$.

Extra: Hoe zou je de eigenwaarden en eigenvectoren van $\widehat{H}$ exact bepalen. Je hoeft dit niet te doen; een complete uitleg van op welke manier dit mogelijk is volstaat. In principe kan je hieruit de eigenwaarden onmiddellijk aflezen.