Examen Analyse IV — Tweede zittijd 1993–94
Tweede Kandidatuur Wiskunde — Groep 1

1. Geef de definities van:

(a) een Cauchy-rij in een metrische ruimte (M, d);
(b) een complete metrische ruimte.

Stel $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een rij in een metrische ruimte (M, d). Toon het volgende aan:

(c) als (x_n) convergeert in M, dan is (x_n) een Cauchy-rij;
(d) als (x_n) een Cauchy-rij is dan is elke limietwaarde van (x_n) ook een limiet van (x_n);

2. Formuleer (zonder bewijs) de middelwaardestelling. Gebruik deze stelling om de volgende resultaten aan te tonen:

(a) Stel X en Y Banachruimten, en $f : \Omega \subset X \to Y$ een afleidbare afbeelding, waarbij Ω een open en convexe deelverzameling is van X, d.w.z. dat voor elke $x_1, x_2 \in \Omega$ geldt dat ook het "lijnstuk" $[x_1, x_2] := \{sx_1 + (1-s)x_2 \mid s \in [0,1]\}$ bevat is in Ω. Dan geldt voor alle $x_0, x_1, x_2 \in \Omega$ dat

$$\|f(x_2) - f(x_1) - Df(x_0) \cdot (x_2 - x_1)\| \leq \|x_2 - x_1\| \sup_{x \in [x_1, x_2]} \|Df(x) - Df(x_0)\|.$$

(b) Stel X en Y Banachruimten, en $\Omega \subset X$ open en samenhangend. Als dan $f : \Omega \to Y$ een afleidbare afbeelding is met $Df(x) = 0$ voor alle $x \in \Omega$, dan is f een constante afbeelding.

3. Stel $X = \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ de vectorruimte van alle rijen $x = (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ met $\xi_n \in \mathbb{R}$ en zodanig dat $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n| < \infty$; met de norm $\|x\| := \sup_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n|$ is X een Banachruimte (waarom?). Stel Y de vectorruimte van alle rijen $y = (\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ met $\eta_n \in \mathbb{R}$ en zodanig dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n$ absoluut convergent is. Toon het volgende aan:

(i) $\|y\|_1 := \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n|$ is een norm op Y;
(ii) als $x = (\xi_n) \in X$ en $y = (\eta_n) \in Y$, dan is de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \xi_n$ absoluut convergent;
(iii) voor elke $y = (\eta_n) \in Y$ vormt de afbeelding

$$u_y : X \to \mathbb{R},\ x = (\xi_n) \mapsto u_y(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \xi_n$$

een continue lineaire operator van X naar $\mathbb{R}$, d.w.z. $u_y \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$;

(iv) $\|u_y\| = \|y\|_1$.

(Hint voor (iv): $\|u_y\| \leq \|y\|_1$ is eenvoudig; ga als volgt te werk om de omgekeerde ongelijkheid te bewijzen: associeer met de gegeven rij $y = (\eta_n) \in Y$ een rij $x_y = (\operatorname{sgn}(\eta_n))_{n\in\mathbb{N}}$, waarbij $\operatorname{sgn}(\eta)$ voor $\eta \in \mathbb{R}$ gedefinieerd is door

$$\operatorname{sgn}(\eta) := \begin{cases} +1 & \text{indien } \eta > 0, \\ 0 & \text{indien } \eta = 0, \\ -1 & \text{indien } \eta < 0; \end{cases}$$

toon aan dat $x_y \in X$, en bereken $|u_y(x_y)|$.)

4. Stel $f : M \to M$ een afbeelding van een complete metrische ruimte M in zichzelf; voor elke $k \geq 1$ definiëren we $f^k : M \to M$ iteratief door

$$f^1(x) := f(x), \quad f^{k+1}(x) := f(f^k(x)), \quad \forall x \in M.$$

Veronderstel dat er een $k \geq 1$ bestaat zodanig dat f^k een contractie is op M. Toon aan:

(i) er bestaat een uniek punt $x^* \in M$ zodanig dat $f(x^*) = x^*$;

(ii) de rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gedefinieerd door $x_{n+1} := f(x_n)$ convergeert voor elke $x_0 \in M$ naar x^*.

(Hint: toon aan dat als x^* het fixpunt is van f^k, dan ook $f(x^*)$ een dergelijk fixpunt is; gebruik voor (ii) het feit dat voor elke r met $0 \leq r < k$ de deelrij $(x_{nk+r})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert naar x^*.)

Puntenverdeling:

- vragen 1 en 2: elk 6 punten;
- vraag 3: 5 punten;
- vraag 4: 3 punten.