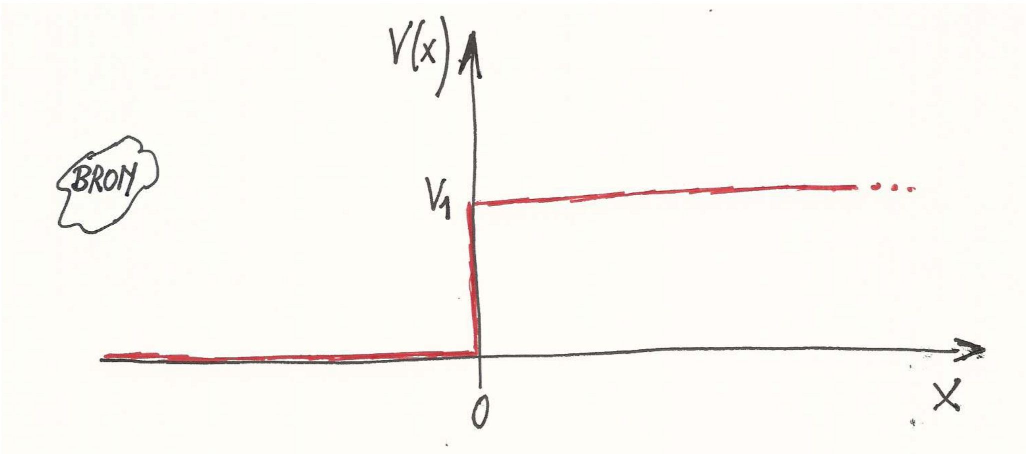
Examen “Kwantummechanica 1”: 13 januari 2014

THEORIE (30 punten)

Antwoord bondig en gevat!

1. THEORIE VRAAG 1 (10 PUNTEN)



Een deeltje met massa m beweegt in één dimensie onder de invloed van een potentiaal

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , -\infty < x < 0 \\ V_1(> 0) & , 0 \leq x < +\infty \end{cases} .$$

De deeltjes worden gecreëeerd met een welbepaalde vaste energie $E \geq 0$ in een bron die zich aan de linkerkant van de oorsprong bevindt.

- Beschouw de situatie $E < V_1$:
  - (a) Bepaal de oplossingen van de TISE en de TDSE.
  - (b) Geef de definitie van de reflectie- en transmissiecoëfficiënt.
  - (c) Bereken de reflectie- en transmissiecoëfficiënt.
  - (d) Bereken de positie waarschijnlijkheidsdichtheid $P(x,t)$ **voor het gebied** $-\infty < x < +\infty$.
- Beschouw de situatie $E > V_1$:
  - (a) Toon aan dat de reflectiecoëfficiënt R gegeven wordt door een uitdrukking van het type
  $$R = \frac{(1-\mathcal{C})^2}{(1+\mathcal{C})^2} ,$$
  en bepaal de grootheid $\mathcal{C}$.

2. THEORIE VRAAG 2 (20 PUNTEN) *MONDELING EXAMEN*

Examen "Kwantummechanica 1": 13 januari 2014

OEFENINGEN (20 punten)

BIJ HET OPLOSSEN VAN HET OEFENINGENGEDEELTE MOGEN ENKEL DE CURSUSNOTA'S (TRANSPARANTEN) EN HET HANDBOEK "QUANTUM MECHANICS" VAN BRANSDEN EN JOACHAIN GEBRUIKT WORDEN.

OEFENING 1 (10 PUNTEN)

Een deeltje met massa m beweegt in één dimensie in een potentiaal gegeven door:

$$V(x) = \begin{cases} 0\ , & 0 \leq x \leq a \\ +\infty\ , & x > a \quad \text{en,} \quad x < 0, \end{cases}$$

en wordt op het tijdstip $t = 0$ in een toestand gebracht die beschreven wordt door de volgende golffunctie:

$$\Psi(x, t = 0) = Ax\,(a - x) \qquad\qquad (0 \leq x \leq a)\ .$$

1. Bepaal de normeringsconstante A.
2. Bepaal de golffunctie $\Psi(x, t)$ op een arbitrair tijdstip t.
3. Noem E_1 de grondtoestandsenergie. Wat is de waarschijnlijkheid om bij een meting van de energie op een arbitrair tijdstip t de waarde E_1 te vinden wanneer op $t = 0$ het deeltje zich bevindt in de hierboven gespecifieerde $\Psi(x, t = 0)$?
4. Bereken de positie waarschijnlijkheidsdichtheid $P(x, t)$ van het systeem. Op welke tijdsstippen t_1 geldt dat $P(x, t = t_1) = P(x, t = 0)$? Verklaar je antwoord.

OEFENING 2 (10 PUNTEN)

We beschouwen een deeltje met massa m dat zich in een tweedimensionale ruimte beweegt. Het deeltje wordt beschreven door de Hamiltoniaan $(k > 0)$

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}k\left(x^2 + z^2\right) \ .$$

Introduceer de variabele $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, de operatoren $a_\pm$ voor de x-richting

$$a_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x \mp i\frac{p_x}{(m\hbar\omega)^{1/2}}\right] \ ,$$

en analoge operatoren $b_\pm$ voor de z-richting.

1. Geef de uitdrukking voor de Hamiltoniaan in termen van de operatoren $a_\pm$ and $b_\pm$.

2. Bepaal het energie-eigenwaardespectrum van het beschouwde tweedimensionale systeem. Bepaal de ontaarding van de grondtoestand en de eerste twee aangeslagen toestanden.

3. Bepaal de genormeerde golffuncties horend bij de grondtoestand en de eerste aangeslagen toestand als functie van de variabelen (x, z, k, m).

4. Toon aan dat de toestand

   $$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[a_+ \left|E_0\right\rangle - ib_-^\dagger \left|E_0\right\rangle\right] \ ,$$

   een eigenvector is van de operator $L_y = zp_x - xp_z$, de y-component van de baan-impulsmomentoperator. Bepaal ook de overeenkomstige eigenwaarde. In de bovenstaande uitdrukking staat de ket $\left|E_0\right\rangle$ voor de grondtoestand van het beschouwde tweedimensionale systeem.