Examen Analyse IV — Eerste zittijd 1993–94
Tweede Kandidatuur Wiskunde — Groep B

1. Bewijs de stelling van Riesz: een genormeerde ruimte X is lokaal compact dan en slechts dan als X eindig-dimensionaal is.

2. Stel $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ open, en $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ een continue afbeelding welke continu afleidbaar is naar de tweede veranderlijke. Beschouw voor elke $(t_0, x_0) \in \Omega$ het beginwaardenvraagstuk

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1}$$

Stel $J(t_0, x_0) =]t^-(t_0, x_0), t^+(t_0, x_0)[$ het bestaansinterval van de unieke maximale oplossing $\bar{x}_{(t_0,x_0)} : J(t_0, x_0) \to \mathbb{R}^n$ van (1). Toon het volgende aan:

(i) als $(t_0, x_0) \in \Omega$ zodanig is dat $t^+(t_0, x_0) < \infty$, dan bestaat er voor elke compacte $K \subset \Omega$ een $\epsilon = \epsilon(K) > 0$ zodanig dat

$$(t, \bar{x}_{(t_0,x_0)}(t)) \notin K, \quad \forall t \in [t^+(t_0, x_0) - \epsilon, t^+(t_0, x_0)[;$$

(ii) als $\Omega = I \times \mathbb{R}^n$, met $I \subset \mathbb{R}$ een open interval, en als

$$\|f(t, x)\| \leq l(t)\|x\| + k(t), \quad \forall (t, x) \in I \times \mathbb{R}^n,$$

waarbij $l : I \to \mathbb{R}_+$ en $k : I \to \mathbb{R}_+$ continue functies zijn, dan is $t^+(t_0, x_0) = \sup I$. (Gebruik het lemma van Gronwall).

3. Stel $\Omega \subset M_1$ een open deelverzameling van een metrische ruimte M_1, en $f : \Omega \to M_2$ een gelijkmatig continue afbeelding van Ω naar een complete metrische ruimte M_2. Toon het volgende aan:

(i) voor elk punt $a \in \partial\Omega$ bestaat de limiet

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \Omega}} f(x);$$

(ii) er bestaat een unieke continue extensie van f tot $\overline{\Omega}$, d.w.z. er bestaat een unieke continue afbeelding $g : \overline{\Omega} \to M_2$ zodanig dat $g(x) = f(x)$, $\forall x \in \Omega$.

4. Stel $I \subset \mathbb{R}$ een compact interval, X en Y twee Banachruimten, en $f : X \to Y$ een continue afbeelding. Definieer een afbeelding $F : \mathcal{C}(I,X) \to \mathcal{C}(I,Y)$ door:

$$F(x)(t) := f(x(t)) \quad \forall x \in \mathcal{C}(I,X),\ \forall t \in I.$$

Toon aan:

(i) de afbeelding F is continu;

(ii) als f continu afleidbaar is, dan is ook F continu afleidbaar, met

$$(DF(x_0) \cdot \tilde{x})(t) = Df(x_0(t)) \cdot \tilde{x}(t), \quad \forall x_0, \tilde{x} \in \mathcal{C}(I,X),\ \forall t \in I.$$

Ter herinnering: $\mathcal{C}(I,X)$ is de Banachruimte van alle continue (en dus ook begrensde) afbeeldingen $x : I \to X$.
(Hint: bewijs dat er voor elke $x_0 \in \mathcal{C}(I,X)$ en voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat

$$\sup_{t \in I} \|f(x_0(t) + x) - f(x_0(t))\| \leq \epsilon$$

voor alle $x \in X$ met $\|x\| \leq \delta$).

Puntenverdeling:

- vragen 1 en 2: elk 6 punten;
- vraag 3: 5 punten;
- vraag 4: 3 punten.

Examen Analyse IV — Eerste zittijd 1993–94
Tweede Kandidatuur Wiskunde — Groep C

1. Stel X een reële genormeerde ruimte, $\alpha : X \to \mathbb{R}$ een niet-triviale lineaire vorm, en $Y \subset X$ het hypervlak met vergelijking $\alpha(x) = 0$.

(i) Geef een nodige en voldoende voorwaarde opdat Y zou gesloten zijn. met bewijs

(ii) Toon aan: als Y gesloten is en $b \notin Y$ dan vormt $\mathbb{R}b := \{\lambda b \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ een topologisch complement van Y in X.

(iii) Toon aan: als Y niet gesloten is dan is Y dicht in X.

2. Stel X en Y twee Banachruimten, en $f : \Omega \to \Omega'$ een homeomorfisme van een open $\Omega \subset X$ op een open $\Omega' \subset Y$; stel $g := f^{-1} : \Omega' \to \Omega$ het inverse homeomorfisme. Veronderstel dat f afleidbaar is in een punt $x_0 \in \Omega$, en dat $Df(x_0) \in \mathcal{L}(X,Y)$ een lineair homeomorfisme is. Toon dan aan dat g afleidbaar is in het punt $y_0 := f(x_0)$, en geef een formule voor $Dg(y_0)$.

3. Stel $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een equicontinue rij van afbeeldingen $f_n : M_1 \to M_2$ tussen twee metrische ruimten M_1 en M_2, zodanig dat voor elke $x \in M_1$ de limiet

$$g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

bestaat. Toon dan het volgende aan:

(i) de afbeelding $g : M_1 \to M_2$ is continu;

(ii) als M_1 compact is dan convergeert de rij (f_n) gelijkmatig naar g in M_2.

Ter herinnering: de equicontinuiteit van de rij (f_n) betekent dat er voor elke $x \in M_1$ en elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat

$$y \in M_1,\ d(x,y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d(f_n(x), f_n(y)) < \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

4. Stel $I := [a,b] \subset \mathbb{R}$ een compact interval, $K : I \times I \to \mathbb{R}$ een continue functie, en $r \in \mathbb{R}$ zodanig dat

$$|r| < \frac{1}{C(b-a)}, \qquad C := \sup_{(t,s)\in I\times I} |K(t,s)|.$$

Toon aan dat er voor elke continue functie $f : I \to \mathbb{R}$ een unieke continue functie $g : I \to \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat

$$\cancel{f(t) = g(t) + r\int_a^b K(t,s)\,ds}, \quad \forall t \in I.$$

(Hint: construeer een gepaste contractie in de Banachruimte $C(I,\mathbb{R})$ van continue (en dus ook begrensde) functies $g : I \to \mathbb{R}$).

Puntenverdeling: vragen 1 en 2: elk 6 punten; vraag 3: 5 punten; vraag 4: 3 punten.

$$f(t) = g(t) + \int_a^b K(t,s)\,g(s)\,ds$$