$\dot{1}$ –

Examen Analyse IV — Eerste zittijd 1992–93
Tweede Kandidatuur Wiskunde — Groep B

1. Geef de definitie van een *compacte* en van een *totaal begrensde* metrische ruimte. Toon aan dat een compacte metrische ruimte (M, d) de volgende eigenschappen heeft:

(i) elke rij in M heeft minstens één limietwaarde;

(ii) M is compleet en totaal begrensd.

2. Formuleer en bewijs de *formule van Taylor* voor een p-keer continu afleidbare afbeelding $f : \Omega \subset X \to Y$ (met X en Y Banachruimten en $\Omega \subset X$ open). Gebruik deze formule om aan te tonen dat er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat

$$\|f(x_0 + \bar{x}) - f(x_0) - \frac{1}{1!}Df(x_0) \cdot \bar{x} - \frac{1}{2!}D^2 f(x_0) \cdot \bar{x}^{(2)} - \cdots - \frac{1}{p!}D^p f(x_0) \cdot \bar{x}^{(p)}\| \leq \epsilon \|\bar{x}\|^p$$

indien $x_0 \in \Omega$ terwijl $\bar{x} \in X$ zodanig is dat $\|\bar{x}\| \leq \delta$ en $\{x_0 + t\bar{x} \mid t \in [0,1]\} \subset \Omega$.

3. Stel $f : M \to M$ een contractie in een metrische ruimte M (welke niet noodzakelijk compleet is). Toon aan:

(i) er bestaat hoogstens één punt $x^* \in M$ waarvoor $x^* = f(x^*)$;

(ii) als er een dergelijke x^* bestaat dan convergeert voor elke $x_0 \in M$ de rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gedefinieerd door

$$x_{n+1} := f(x_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

naar x^*.

(Hint: gebruik $d(x^*, x_{n+1}) = d(f(x^*), f(x_n))$.)

4. Stel $X = \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ de vectorruimte van alle rijen $x = (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ met $\xi_n \in \mathbb{R}$ en zodanig dat $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n| < \infty$; met de norm $\|x\| := \sup_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n|$ is X een Banachruimte (waarom?). Stel Y de vectorruimte van alle rijen $y = (\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ met $\eta_n \in \mathbb{R}$ en zodanig dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n$ absoluut convergent is. Toon het volgende aan:

(i) $\|y\|_1 := \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n|$ is een norm op Y;

(ii) als $x = (\xi_n) \in X$ en $y = (\eta_n) \in Y$, dan is de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \xi_n$ absoluut convergent;

(iii) voor elke $y = (\eta_n) \in Y$ vormt de afbeelding

$$u : X \to \mathbb{R}, x = (\xi_n) \mapsto u(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \xi_n$$

een continue lineaire operator van X naar $\mathbb{R}$, d.w.z. $u \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$;

(iv) $\|u\| = \|y\|_1$.

Ana IV 1

(Hint voor (iv): $\|u\| \leq \|y\|_1$ is eenvoudig; voor de omgekeerde ongelijkheid, beschouw $u(x)$, met $x \in X$ gedefinieerd door $x = (\operatorname{sgn}(\eta_n))_{n\in\mathbb{N}}$, en waarbij $\operatorname{sgn}(\eta)$ voor $\eta \in \mathbb{R}$ gedefinieerd is door

$$\operatorname{sgn}(\eta) := \begin{cases} +1 & \text{indien } \eta > 0, \\ 0 & \text{indien } \eta = 0, \\ -1 & \text{indien } \eta < 0. \end{cases}$$

♠ 5. Stel $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ open, en $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ een continue afbeelding welke continu afleidbaar is naar de tweede veranderlijke. Stel $(t_0, x_0) \in \Omega$, en noteer met $\mathrm{J}(t_0, x_0)$ het maximale bestaansinterval van de oplossing $\tilde{x}(t; t_0, x_0)$ van het beginwaardenvraagstuk

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Veronderstel dat $\mathrm{t}^+ = \mathrm{t}^+(t_0, x_0) := \sup \mathrm{J}(t_0, x_0) < \infty$. Toon aan dat er dan voor elke compacte $K \subset \Omega$ een $\epsilon = \epsilon(K) > 0$ bestaat zodanig dat

$$(t, \tilde{x}(t; t_0, x_0)) \notin K, \quad \forall t \in [t^+ - \epsilon, t^+[.$$

Puntenverdeling:

- vragen 1 en 2: elk 6 punten;
- vraag 3: 5 punten;
- vraag 4: 3 punten;
- ♠ door het beantwoorden van vraag 5 kunnen maximaal 2 bijkomende punten verdiend worden.

Ana IV