



Wetenschappelijk Rekenen

Examen - Bacheloropleiding informatica

Theorie – 10 juni 2014

Naam :

1. (4 pt) Definieer, formuleer of omschrijf de volgende begrippen :

(i) het conditiegetal van een probleem :

(ii) QR-algoritme :

(iii) pseudo-inverse van een matrix :

(iv) adaptieve kwadratuur :

2. (3 pt) Stel dat je heel veel grote (stel dit aantal gelijk aan k) vierkante lineaire stelsels van n veranderlijken in n onbekenden moet oplossen, waarbij de overgrote meerderheid van de vergelijkingen (stel dit aantal gelijk aan $n - m$) telkens dezelfde zijn, m.a.w. we staan voor een probleem van de vorm

$$C_j x_j = c_j, \quad j = 1 \dots, k$$

waarbij elke x_j een $n \times 1$ kolomvector is. waarbij de $n \times n$ matrices C_j en de $n \times 1$ kolommatrices c_j schematisch geschreven kunnen worden als

$$C_j = \begin{pmatrix} A \\ B_j \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad c_j = \begin{pmatrix} a \\ b_j \end{pmatrix}$$

waarbij A een $(n - m) \times n$ matrix en a een $(n - m) \times 1$ kolommatrix is en waar B_i een $m \times n$ matrix en b_i een $m \times 1$ kolommatrix is en waarbij $n \gg m$. Bvb. om de gedachten te vestigen kun je $k = 50$, $n = 500$ en $m = 1$ stellen. Dan moet je $k = 50$ stelsels oplossen die slechts in 1 vergelijking van elkaar verschillen.

- (i) Los dit probleem, louter gebruikmakend van de numerieke methoden die we in de cursus besproken hebben, op.

- (ii) Heb je bij de bovenstaande aanpak bedenkingen?

- (iii) Beschrijf, zonder in details van formules te treden, een algoritme dat met je opmerkingen rekening houdt.

3. (2 pt) Hoe heet het onderstaande algoritme? Waartoe dient het precies? Leg uit hoe het werkt en leg uit hoe je, eens convergentie is bereikt, het gezochte resultaat kunt vinden.

\mathbf{x}_0 = willekeurige vector (verschillend van $\mathbf{0}$)

for $k = 1, 2 \dots$

 Los op naar $\mathbf{y}_k : (\mathbf{A} - \sigma \mathbf{I}) \mathbf{y}_k = \mathbf{x}_{k-1}$

$\mathbf{x}_k = \mathbf{y}_k / \|\mathbf{y}_k\|_\infty$

end

4. (i) (2 pt) Een interpolatieveelterm van graad n door $n + 1$ gegeven punten (t_i, y_i) kan, afhankelijk van de gekozen basis, op verschillende manieren geconstrueerd worden. Bespreek 4 verschillende manieren.

(a) manier 1 :

(b) manier 2 :

(c) manier 3 :

(d) manier 4 :

- (ii) (1 pt) Waarin verschillen, wiskundig gezien, de 4 aldus bekomen interpolatieveeltermen? Waarin verschillen, vanuit numeriek standpunt, de 4 aldus bekomen interpolatieveeltermen?

5. (2 pt) Schrijf het Newton-Raphson schema, ter bepaling van de nulpunten van een scalaire vergelijking $f(x) = 0$, op. Leg uit, ook aan de hand van een tekening, hoe je aan die formule komt. Leg uit hoe je dit schema gebruikt wanneer je stelsels van vergelijkingen moet oplossen.

6. (2 pt) We bestuderen de Richardson extrapolatietechniek voor een functie $F(h) = a_0 + a_1 h^p + \mathcal{O}(h^r)$ waarbij $r > p$. Hierbij zoeken we een benadering voor $a_0 = F(0)$, en daarvoor gebruiken we een numerieke methode, voorgesteld door $F(h)$. Stel dat we F kennen voor h en h/q .

(i) (1 pt) Elimineer $a_1 h^p$ uit de bovenstaande formule, vertrekkend van de uitdrukkingen voor $F(h)$ en $F(h/q)$, zodat je komt tot een betere benadering a_0

(ii) (1 pt) Pas dit algoritme toe voor $q = 2$ bij $\int_a^b f(x) dx \approx M(f)$ waarbij $M(f) = (b - a) f(m)$ met $m = (a + b)/2$. Wat zijn p en r in deze formule? Hoe luidt de kwadratuurformule die je op die manier bekomt?

7. (4 pt)

- (i) (2 pt) Leg op een schematische wijze uit hoe een DFT kan gebruikt worden om ruis te elimineren uit een signaal van lengte $n = 2^m$. Bespreek de complexiteit van de bewerkingen die hierbij aan bod komen. Leg hierbij ook uit waarom de omweg via de DFT te verkiezen is.

- (ii) (2 pt) Hoe ontstaat een DCT uit een DFT? Vermeld een voordeel van DCT t.o.v. DFT.