Examen THEORETISCHE MECHANICA - 16/06/2016 - 8:30
Theorie

T1. Het verband tussen de "absolute" snelheid $\mathbf{v}_a$ en versnelling $\mathbf{a}_a$ van een deeltje P t.o.v. een inertiaalstelsel $(O; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, enerzijds, en de "relatieve" snelheid $\mathbf{v}_r$ en versnelling $\mathbf{a}_r$ t.o.v. een niet-inertiaalstelsel $(O'; \mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z)$, anderzijds, wordt gegeven door:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}', \quad \mathbf{a}_a = \mathbf{a}_{O'} + \mathbf{a}_r + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r,$$

waarbij $\mathbf{r}' = \mathbf{O'P}$ en $\boldsymbol{\omega}$ de ogenblikkelijke rotatievector is van de bewegende basis t.o.v. de vaste basis. Onderstel dat P een massadeeltje is, met massa m, in de buurt van het aardoppervlak en onderworpen aan de gravitationele aantrekkingskracht $m\mathbf{g}_N$ van de aarde. Kies O in het centrum van de aarde en de x-, y- en z-as vast t.o.v. de sterrenhemel, met de z-as volgens de poolas, en zij $(O'; \mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z)$ vast verbonden aan de aarde, met O' een punt op het aardoppervlak.
(i) Stel de vectoriële bewegingsvergelijking op van P t.o.v. het niet-inertiaalstelsel in O' en leid hieruit het verband af tussen de zwaartekracht $m\mathbf{g}$ en de Newtoniaanse gravitatiekracht $m\mathbf{g}_N$. (Aanwijzing: De aardrotatie $\boldsymbol{\omega}$ mag constant ondersteld worden en $O'P = \| \mathbf{r}' \|$ is heel klein t.o.v. $OO' = \| \mathbf{r}_{O'} \|$).
(ii) Stel het verband op tussen $g = \| \mathbf{g} \|$ (de versnelling van de zwaartekracht, ook effectieve valversnelling genoemd) en $g_N = \| \mathbf{g}_N \|$, steunend op het feit dat de hoek tussen de vectoren $\mathbf{g}$ en $\mathbf{g}_N$ heel klein is.
(iii) Integreer de gevonden bewegingsvergelijking één maal om de relatieve snelheid $\mathbf{v}_r (= \mathbf{r}'^{(e')})$ van P te bepalen in het geval van een vrije val met beginvoorwaarden $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{r}'_0$ en $\mathbf{v}_r(0) = \mathbf{0}$.
(OPM. De volledige integratie van de bewegingsvergelijking om $\mathbf{r}'(t)$ te bepalen, wordt NIET gevraagd!)

T2. Beschouw een Lagrangiaans systeem met Lagrangiaan $L(t, q, \dot{q})$ waarbij $q := (q_1, \ldots, q_n)$ de veralgemeende coördinaten en $\dot{q} := (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$ de veralgemeende snelheden van het systeem voorstellen. De Lagrangiaan wordt minstens van de klasse $\mathcal{C}^2$ verondersteld. Bespreek de overgang van het Lagrangiaans naar het Hamiltoniaans formalisme.
(i) Stel de Legendretransformatie $(q, \dot{q}) \to (q, p)$ op, waarbij $p := (p_1, \ldots, p_n)$ de toegevoegde momenten zijn. Wanneer is deze transformatie inverteerbaar? (Dan noemen we de Lagrangiaan regulier.)
(ii) Geef de definitie van de Hamiltoniaan H die correspondeert met een reguliere L en toon de **equivalentie** aan tussen de Lagrangevergelijkingen $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ enerzijds, en de Hamiltonvergelijkingen $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ anderzijds.

) *Niet vergeten:* OP ELK BLAD UW NAAM VERMELDEN!!
Theorie en oefeningen moeten APART afgegeven worden.

Oefeningen

O1. Een vliegtuig vliegt in een vast meridiaanvlak van de (bolvormig ondersteld) aarde van de evenaar naar de noordpool, op een constante hoogte h boven het aardoppervlak. De relatieve snelheid $\mathbf{v}_r$ van het vliegtuig ten opzichte van de roterende aarde heeft een constante grootte $\|\mathbf{v}_r\| = u$. Bereken, in functie van de tijd, de absolute snelheid $\mathbf{v}_a(t)$ en de absolute versnelling $\mathbf{a}_a(t)$ van het vliegtuig wanneer het zich op een noorderbreedte φ bevindt. De aarde heeft straal R en roteert met constante hoeksnelheid ω om de poolas. <u>OPM.</u>: De noorderbreedte is de hoek φ die, langs de meridiaan, gemeten wordt vanaf de evenaar naar de noordpool toe, zodat in het bijzonder op $t = 0$, $\varphi(0) = 0$ is.)

O2. Een deeltje met massa m beweegt langs een *glad* schroefoppervlak met parametervoorstelling (in cilindercoördinaten) $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta, z = \ell\theta$ (ℓ constant). Het deeltje is onderworpen aan de kracht $\mathbf{F} = 2m\rho\mathbf{e}_\rho$ en de beginconfiguratie op $t = 0$ wordt bepaald door $\theta_0 = 0, \dot\theta_0 = 1, \rho_0 = \ell, \dot\rho_0 = 0$.
(i) Stel, in het Newtoniaans formalisme, de bewegingsvergelijkingen op ter bepaling van $\rho(t)$ en $\theta(t)$.
(ii) Toon aan dat één van deze vergelijkingen de eerste integraal $(\rho^2 + \ell^2)\dot\theta$ oplevert die toelaat om $\dot\theta$ uit te drukken als functie van ρ.
(iii) Substitueer deze uitdrukking in de andere bewegingsvergelijking om deze te reduceren tot een differentiaalvergelijking voor een ééndimensionaal probleem in de veranderlijke ρ. Toon dan aan dat men uit deze vergelijking kan afleiden dat, rekening houdend met de beginvoorwaarden, $\rho(t)$ moet voldoen aan

$$\frac{1}{2}\dot\rho^2 + \frac{2\ell^4}{\rho^2 + \ell^2} - \rho^2 = 0.$$

(iv) Bepaal tenslotte de componenten van de reactiekracht van het oppervlak op het deeltje (in functie van ρ en ℓ).