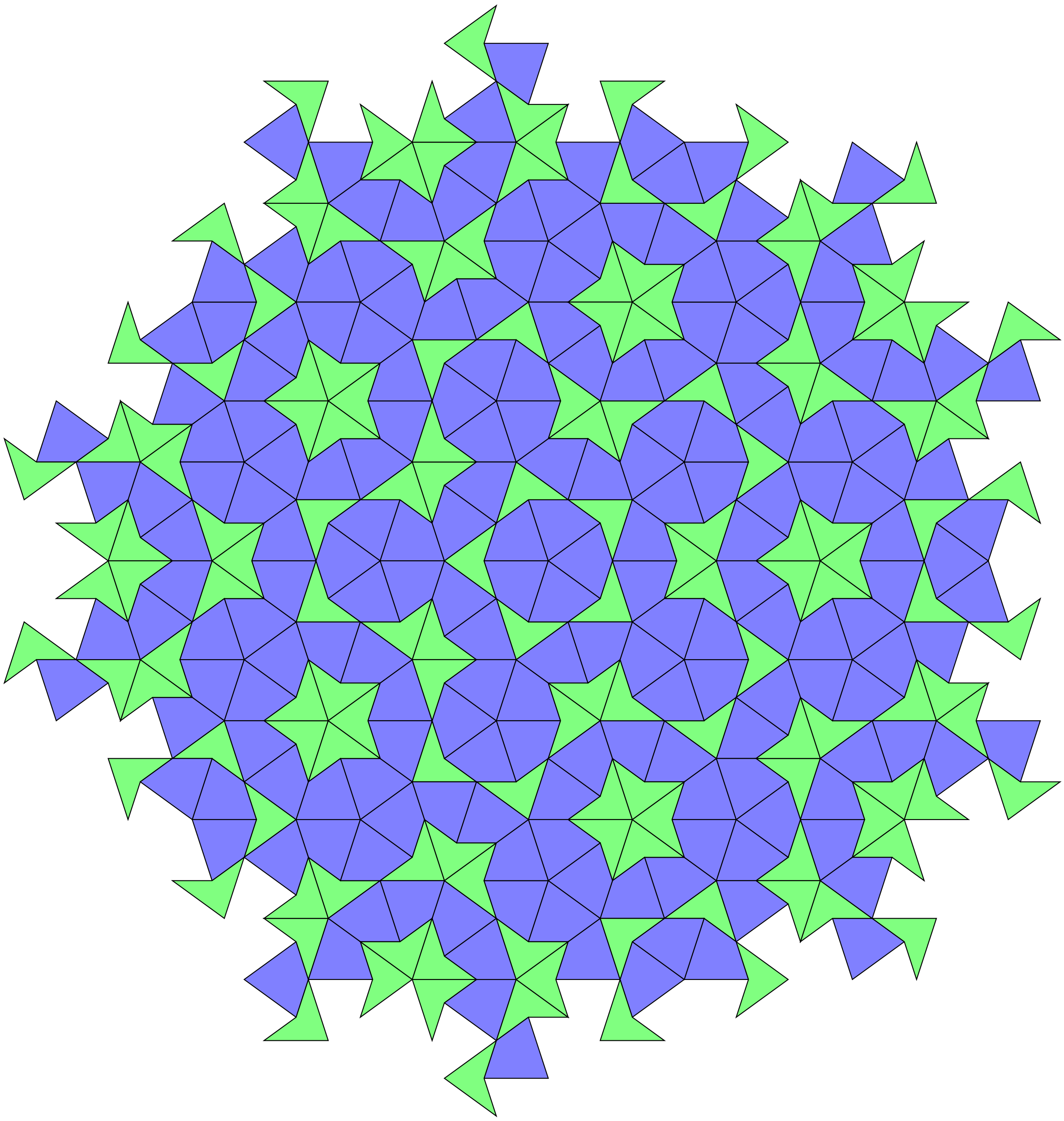
Betegelen

Computerproject Wiskunde — projectopgave 1

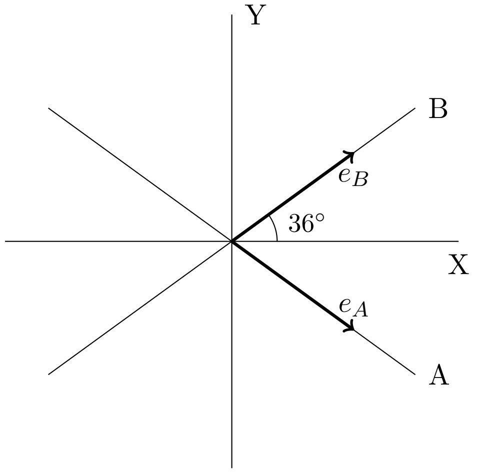
geïnspireerd door de Imaginary-tentoonstelling

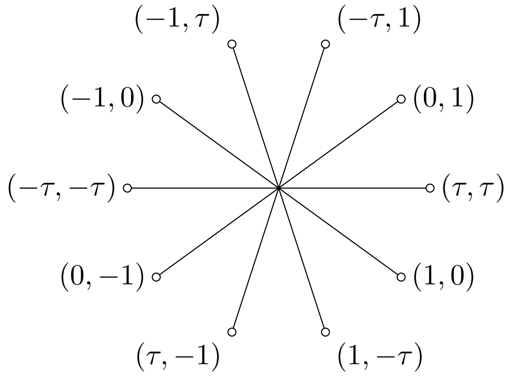
2015–2016



1 Draaien over 36°

Omdat we in dit project heel veel zullen werken met hoeken die veelvouden zijn van 36°, werken we met een niet-standaard assenstelsel waarvan de assen (die we verder de A- en B-as zullen noemen) een hoek maken van 72°. De overeenkomstige basisvectoren noemen we dan $\vec{e}_A$ en $\vec{e}_B$ — zie linkerfiguur.





(1)

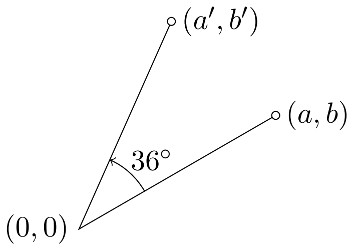
Alleen wanneer we tenslotte objecten zullen tekenen, moeten we die A- en B-coördinaten uiteindelijk omzetten naar gewone X- en Y-coördinaten. Maar in de berekeningen stellen we dit zo lang mogelijk uit. De (X, Y)-coördinaten van $\vec{e}_A$ en $\vec{e}_B$ zijn $(\cos\frac{\pi}{5}, \mp\sin\frac{\pi}{5})$.

De rechterfiguur toont de (A, B)-coördinaten van de 10 hoeken van een regelmatige tienhoek, ingeschreven in een cirkel met straal 1. Hierbij is

$$\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618\ldots$$

Er geldt $\tau^2 = 1 - \tau \approx 0.382\ldots$.

In dit nieuwe assenstelsel is het relatief eenvoudig om de nieuwe coördinaten te berekenen van een vector (a', b') die je bekomt door een vector (a, b) over een hoek van 36° te draaien:



$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau & -\tau \\ \tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Opgave 1. *Gebruik de symbolische rekenmogelijkheden van Sage om te bewijzen dat als we formule (2) achtereenvolgens 10 keer toepassen op de vector (a, b) we dan inderdaad opnieuw (a, b) als resultaat krijgen. Wat gebeurt er als we de formule maar 5 keer toepassen?*

(We zullen in het vervolg niet telkens weer vermelden dat je Sage moet gebruiken om de opgaven op te lossen.)

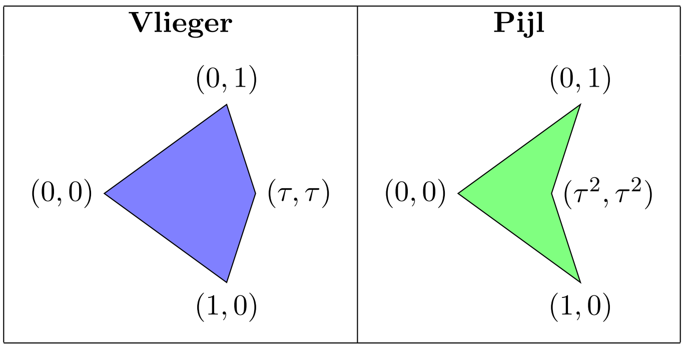
Het berekenen van lengtes in het (A, B)-assenstelsel is iets ingewikkelder dan gewoonlijk. De lengte (norm) van de vector met coördinaat (a, b) wordt gegeven door de volgende formule:

$$\|(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2 + \tau ab}.$$

Opgave 2. *Ga met bovenstaande formule na dat de lengte van de 10 vectoren die de hoekpunten vormen van de regelmatige 10-hoek uit* (1) *wel degelijk lengte 1 hebben.*

2 Vliegers en pijlen

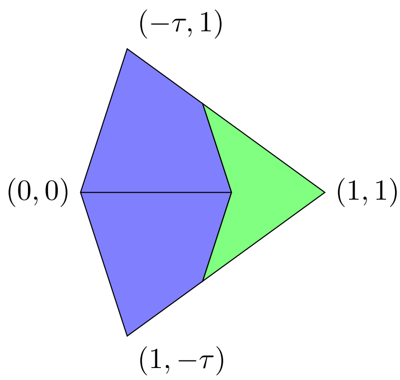
In wat volgt maken we gebruik van twee figuren, 'vlieger' en 'pijl' genoemd. Dit zijn vierhoeken met hoeken die veelvouden zijn van 36°. Hieronder tekenen we deze figuren en geven telkens de (A, B)-coördinaten van de hoekpunten.



Opgave 3. *Maak een tekening van deze twee figuren. Let op! Je zal de* (A, B)*-coördinaten moeten omzetten naar* (X, Y)*-coördinaten. Schrijf hiervoor een functie in Sage, want je zal die later nog heel wat nodig hebben. Zorg ervoor dat de coördinaatassen niet zichtbaar zijn op je tekening.*

De vliegers en pijlen die we zullen gebruiken, bevinden zich niet altijd netjes op het nulpunt van het assenstelsel en zullen ook af en toe moeten geroteerd worden. Bekijk bijvoorbeeld de figuur hiernaast die bestaat uit twee vliegers en één pijl. Men noemt dit een 'aas'.

Een aas bestaat uit twee vliegers, geroteerd over 36° en -36°, en één pijl die niet alleen 180° is gedraaid, maar ook verschoven naar het punt met (A, B)-coördinaten $(1, 1)$.



3 Transformaties

We gebruiken drie verschillende manieren om vliegers en pijlen te *transformeren*: draaien, verschuiven en herschalen. Elk van deze transformaties kan voorgesteld worden met een lineaire afbeelding van de vorm

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Merk op dat we hier rekenen met 3-dimensionale vectoren $(a, b, 1)$ met als laatste element een 1. De bijkomende 1 is nodig om de berekeningen te doen maar speelt voor de rest geen rol: wanneer we figuren gaan tekenen dan beschouwen we enkel de eerste twee elementen (a, b) van de vectoren en negeren we dus die laatste 1.

De 3×3 matrix in (3) noemen we de *matrixvoorstelling* van de lineaire afbeelding.

De draaiing (2) heeft als matrixvoorstelling

$$\begin{pmatrix} \tau & -\tau & 0 \\ \tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Een verschuiving $(a, b) \mapsto (a + a_0, b + b_0)$ heeft als matrixvoorstelling

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_0 \\ 0 & 1 & b_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Een herschaling met een factor δ, dus de afbeelding $(a, b) \mapsto (\delta a, \delta b)$, heeft als matrixvoorstelling

$$\begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

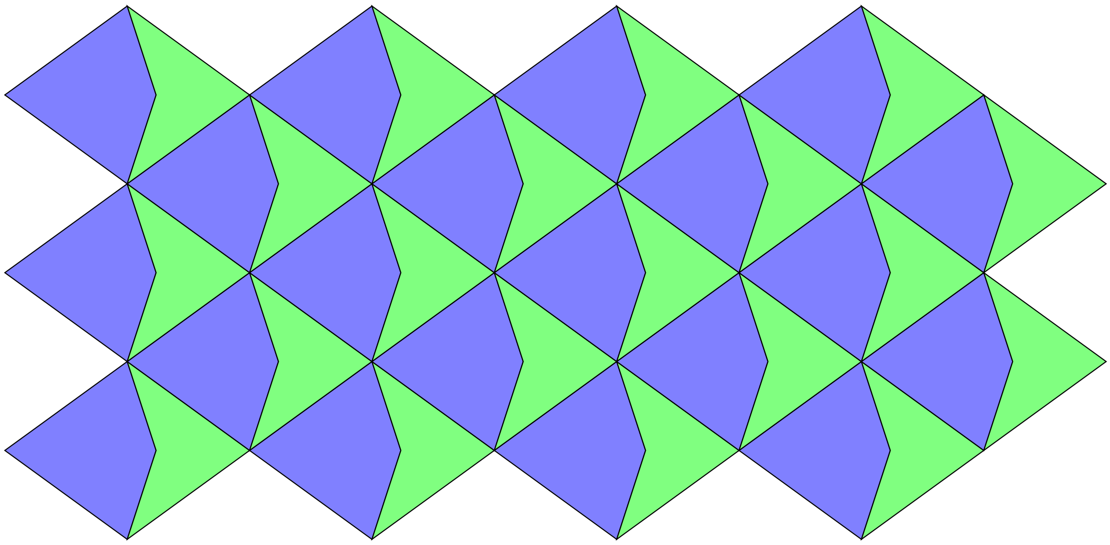
Zoals je in *Lineaire algebra en meetkunde I* hebt gezien komt een samenstelling van transformaties overeen met een matrixvermenigvuldiging.

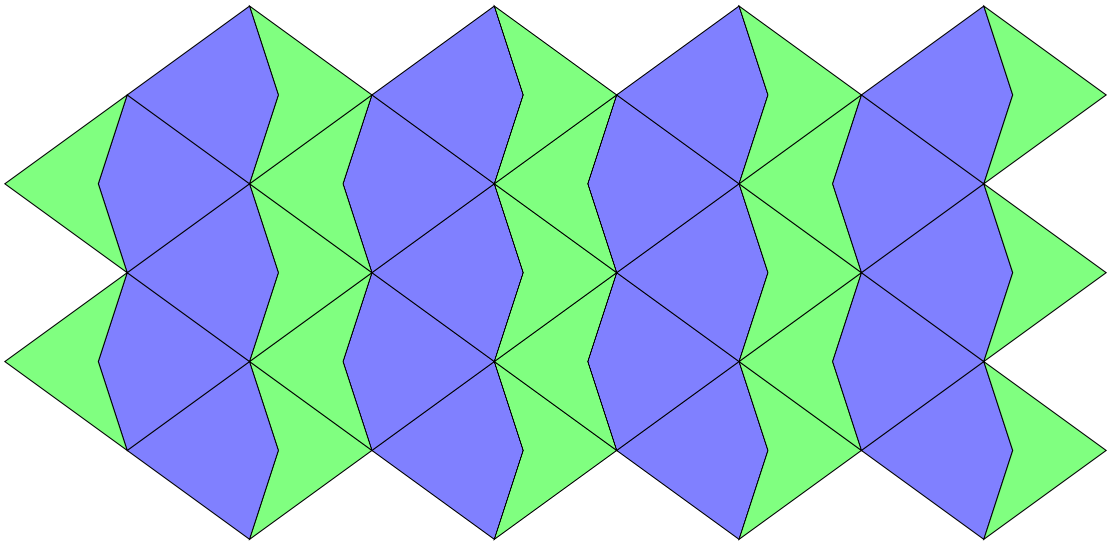
Opgave 4. *Schrijf een functie in Sage die een getransformeerde vlieger teruggeeft. Deze functie heeft één parameter, namelijk een 3×3 matrix die de transformatie voorstelt. Schrijf een gelijkaardige functie voor pijlen. Teken een aas met behulp van deze twee functies.*

Opgave 5. *Schrijf nu ook een functie die een getransformeerde* aas *teruggeeft, analoog aan de functies uit opgave 4. Teken hiermee een aas geroteerd over 72° (in tegenwijzerzin).*

4 Periodieke betegeling

Vliegers en pijlen kunnen op verschillende manieren gebruikt worden om het vlak te *betegelen*. Hieronder zie je twee voorbeelden:



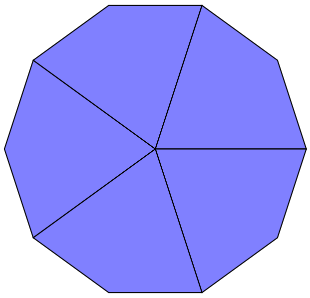


Deze voorbeelden vormen zogenaamde *periodieke* betegelingen. Deze hebben de eigenschap dat er een niet-triviale translatie bestaat waarover het patroon kan verschoven worden zonder te veranderen.

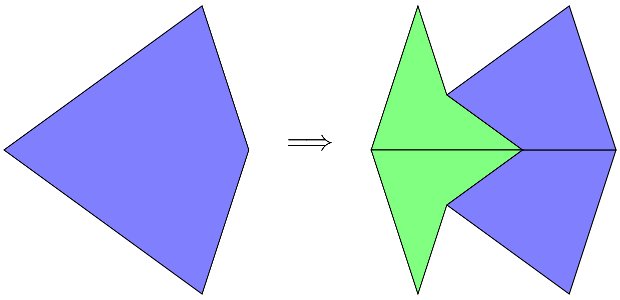
Opgave 6. *Reproduceer deze beide tekeningen. Gebruik lussen zodat je gemakkelijk het aantal rijen en kolommen in je tekening kan aanpassen.*

5 Niet-periodieke betegeling met tienvoudige symmetrie

De vliegers en pijlen kunnen ook geschikt worden in een *niet-periodieke* betegeling met vijfvoudige rotatiesymmetrie (plus spiegelsymmetrie) die het ganse vlak vult. Dit is echter minder voor de hand liggend — het heeft tot in 1974 geduurd vooraleer wiskundigen doorhadden dat een dergelijke betegeling bestond.

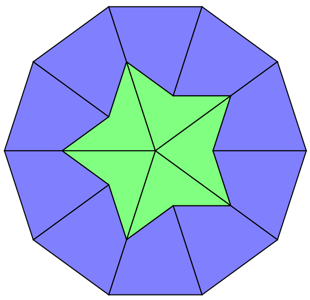


Om een dergelijke vijfvoudig symmetrische betegeling te maken, beginnen we met een zogenaamde 'zon' (zie hiernaast). In deze zon vervangen we nu alle vliegers door een structuur die uit twee vliegers bestaat en twee pijlen, maar dan kleiner (met een factor τ). Dit heet een vlieger *opblazen* (Engels: *inflate*).



(4)

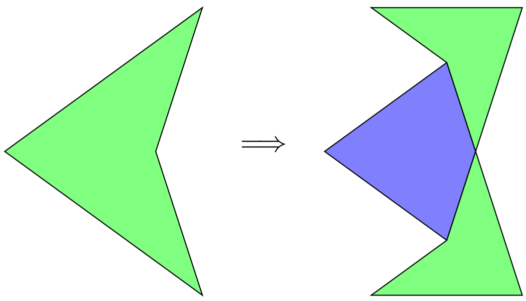
Dit geeft de structuur die hier rechts is afgebeeld. We noemen dit een 'opgeblazen zon'. De 5 pijlen in het midden vormen een 'ster'.



Merk op dat het gebruik van (4) erin resulteert dat elke pijl in het patroon twee keer voorkomt. Je kan echter best vermijden dat die pijl ook twee keer wordt getekend.

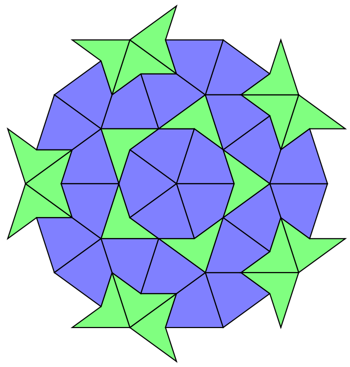
Opgave 7. *Teken een zon en een opgeblazen zon. Doe dit zonder veel 'knippen en plakken' maar gebruik functies, parameters en lussen op een intelligente manier.*

Ook pijlen kan je opblazen, op de volgende manier:



(5)

Met behulp van (4–5) kan je nu de opgeblazen zon nog een stap verder opblazen, zoals hieronder rechts getoond.



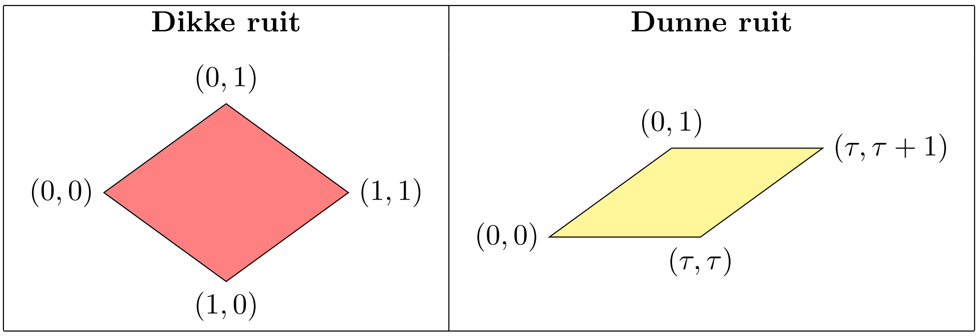
Merk op dat deze ‘twee keer opgeblazen’ zon weer een zon als deelpatroon bevat. Als we dit patroon dus opnieuw twee keer opblazen, en opnieuw, enz., en telkens herschalen zodat de tegels even groot blijven, bekomen we een oneindig groeiend patroon dat in het centrum steeds hetzelfde blijft, m.a.w., een betegeling die het vlak volledig vult. De ‘vier keer opgeblazen zon’ zie je op de titelpagina.

Opgave 8. [Niet gemakkelijk!] *Teken deze opgeblazen zonnen. Maak hierbij op één of andere manier gebruik van de opblaasbewerkingen* (4–5)*. Doe dit niet door elke tegel (of groep van tegels) ‘met de hand’ op zijn plaats te zetten — dit zal je veel te veel werk kosten!*

De grootste tekening vraagt al heel veel rekenwerk van Sage. Probeer dus voldoende aandacht te besteden aan het efficiënt maken van je Sage-code.

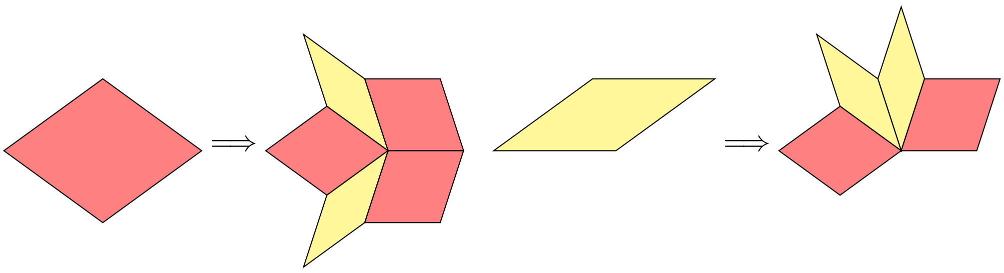
6 En verder ...

Wat we hier met vliegers en pijlen gedaan hebben, kan je ook met andere structuren, zoals bijvoorbeeld de ‘dikke’ en de ‘dunne’ ruit hieronder:

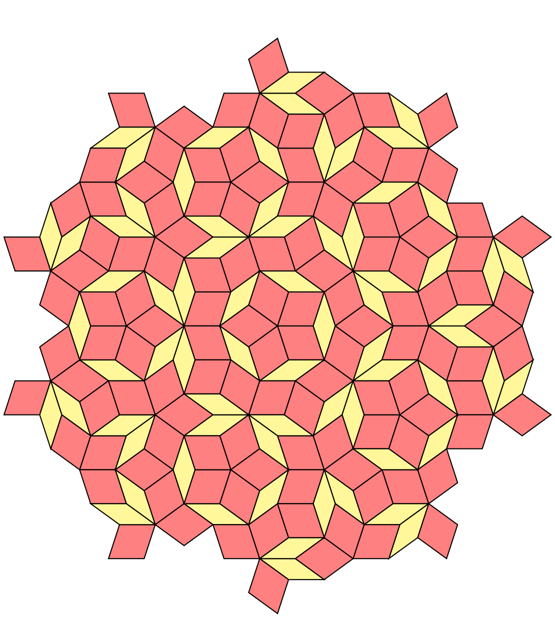


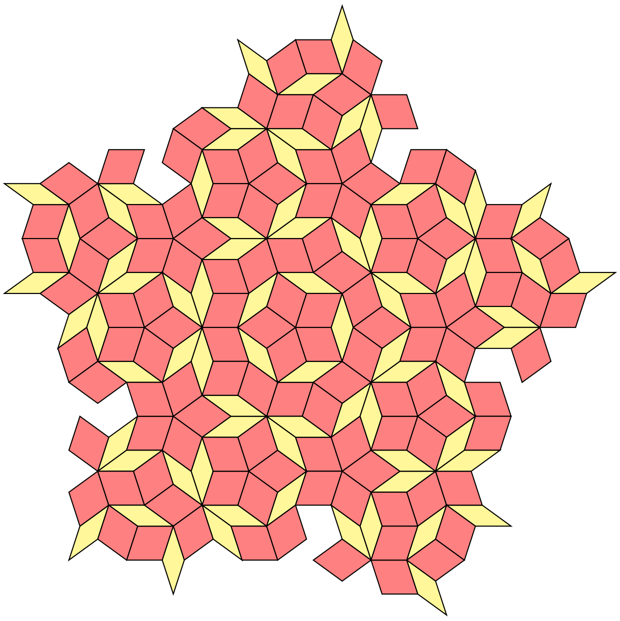
Bij deze figuren zijn alle zijden gelijk, en de hoeken zijn opnieuw veelvouden van 36°.

De opblaasregels zijn nu de volgende:

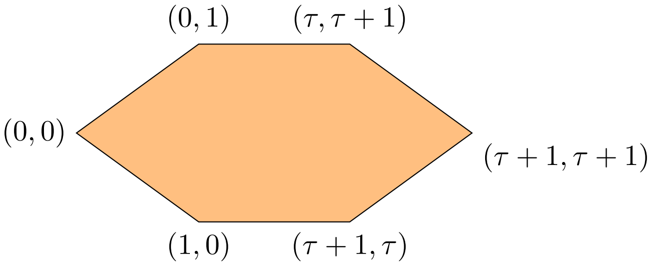
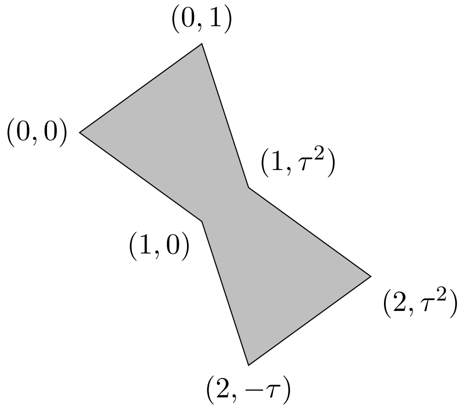


En door hetzelfde procédé te gebruiken als bij de vliegers en pijlen, krijg je mooie figuren, zoals onderstaande

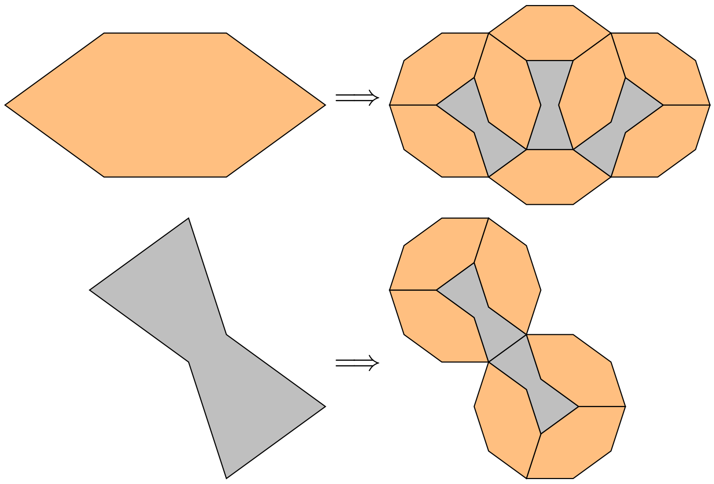




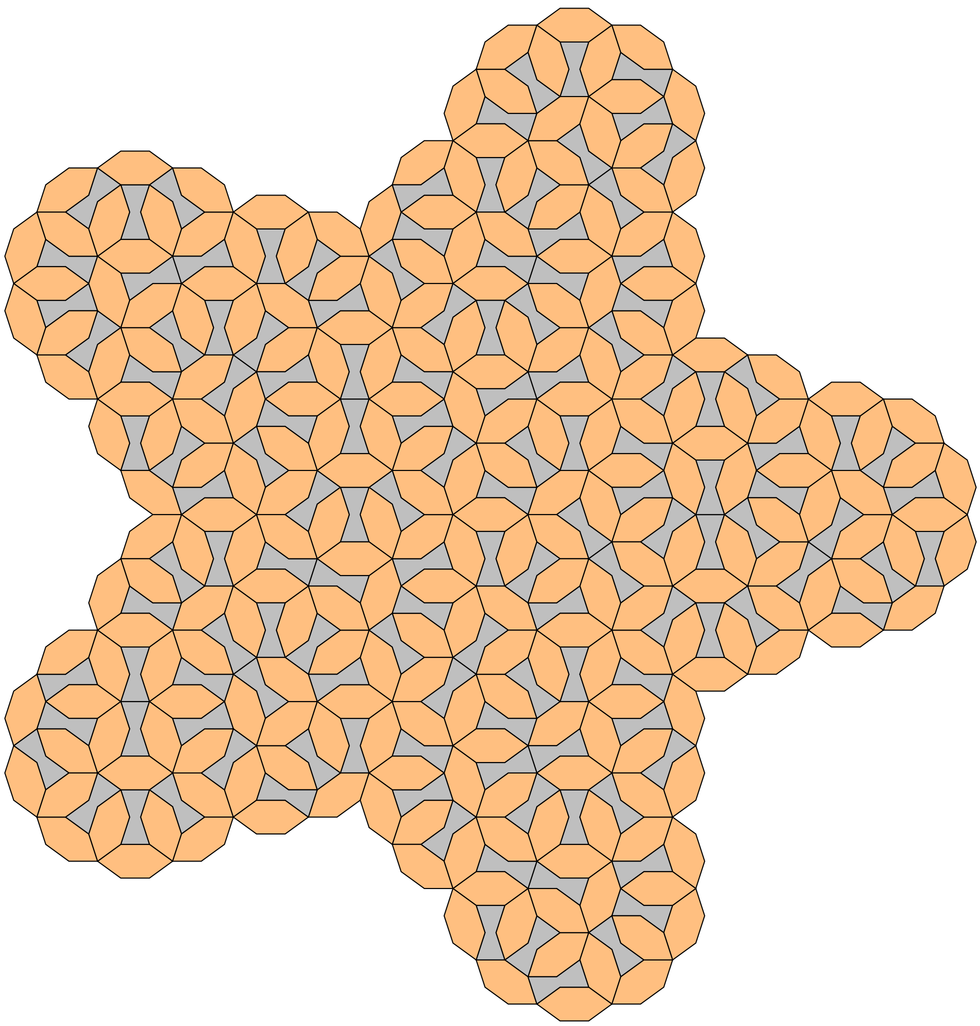
We eindigen met de *Girih tegels* die ook in de Islamitische architectuur gebruikt worden (reeds vanaf de 15$^{\text{e}}$ eeuw).

Boot	**Strik**
	

De opblaasregels zijn iets ingewikkelder dan voorheen. De verhouding tussen de kleine deeltegels en de originelen is nu τ^2 i.p.v. τ:



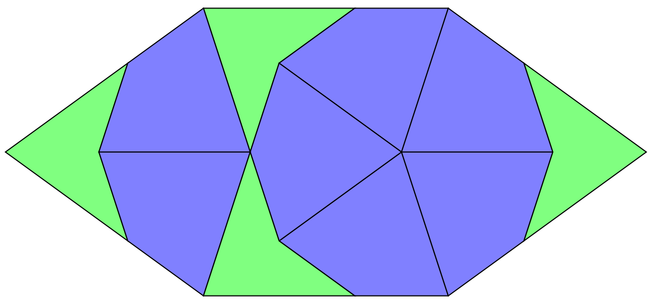
En als we een ster van vijf boten drie keer opblazen, krijgen we het volgende resultaat:

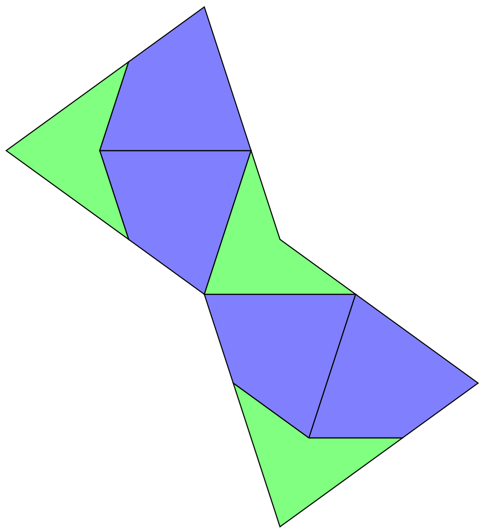


Opgave 9. [Enkel voor liefhebbers en geïnteresseerden[1].] *Teken de betegelingen uit de vorige twee bladzijden.*

Je zal een beetje moeten experimenteren met de oriëntatie van de onderdelen van de opblaasregels. Wanneer je een deeltegel 180° omdraait, dan heeft dit geen effect bij één keer opblazen. Dit kan echter wel gedeeltelijk overlappende tegels tot gevolg hebben wanneer je een figuur meerdere keren na elkaar opblaast, en dit is niet de bedoeling.

Maak deze opgave alleen maar wanneer je door het oplossen van de vorige opgaven een systeem (= set van Sage-functie en -procedures) hebt kunnen ontwikkelen dat ook bruikbaar is in een meer algemene context. Met andere woorden, als je de tekeningen kunt maken door alleen maar enkele variabelen of parameters te veranderen, en dus zonder al het werk van de eerste opgaven over te doen en honderden lijnen code te moeten knippen en plakken.





[1] Op deze opgave staan heel weinig punten in vergelijking tot het werk dat je eraan zult moeten besteden. Je krijgt al de volle punten als je de eerste 8 opgaven perfect kunt oplossen.