Examen THEORETISCHE MECHANICA - 18/06/2015 - 8:30

Eerste examenperiode

Theorie

T1. Een deeltje met massa m en plaatsvector $\mathbf{r}$ (t.o.v. een inertiaalwaarnemer) is onderworpen aan een kracht $\mathbf{F} : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathrm{Vect}\, E, (t, \mathbf{r}) \mapsto \mathbf{F}(t, \mathbf{r})$, met Ω een open gebied in Vect E. ($\mathbf{F}$ wordt voldoende differentieerbaar verondersteld). De componenten van $\mathbf{r}$ en van $\mathbf{F}$ t.o.v. een orthonormale basis van Vect E ($\equiv \mathbb{R}^3$) zijn resp. (x_1, x_2, x_3) en (F_1, F_2, F_3). De kinetische energie(-functie) van het deeltje en de vermogensfunctie van de kracht worden resp. gegeven door $T = \frac{1}{2}mv^2$ en $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$.

(i) Toon aan dat $D_t T = P$, waarbij D_t de directionele afleidingsoperator voorstelt geassocieerd aan de beweging van het deeltje, nl. $D_t = \partial/\partial t + v_i(\partial/\partial x_i) + (F_i/m)(\partial/\partial v_i)$.

(ii) Onderstel dat $\Omega \subseteq \mathrm{Vect}\, E$ een open stervormig gebied is rond de oorsprong. Toon dan aan dat de kracht afleidbaar is van een potentiële energiefunctie $V(t, \mathbf{r})$, nl. $\mathbf{F} = -\nabla V$, als en slechts als er in Ω voldaan is aan

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t, \mathbf{r}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(t, \mathbf{r}), \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

en leid uit het bewijs een expliciete formule af voor V.

(iii) Als de kracht afleidbaar is van een potentiële energiefunctie, bewijs dan dat

$$D_t(T + V) = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Wanneer zegt men dat $\mathbf{F}$ een conservatieve kracht is? Welk besluit kan je in dat geval trekken?

T2. Beschouw een systeem van N puntdeeltjes met respectievelijke massa's m_i en plaatscoördinaten $\mathbf{r}_i$, waarop krachten $\mathbf{F}_i(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N)$ aangrijpen en dat aan L onafhankelijke holonome bindingen onderworpen is. De transformatie van cartesische naar de $n = 3N - L$ veralgemeende coördinaten $q = (q_1, \dots, q_n)$ wordt gegeven door $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t, q)$. De evolutie van dat systeem wordt dan bepaald door de Lagrangevergelijkingen van de eerste soort :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(t, q, \dot{q}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Hierbij stellen $Q_i = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \cdot (\partial \mathbf{r}_j/\partial q_i)$ de veralgemeende krachtcomponenten voor en T de kinetische energie van het systeem, uitgedrukt in functie van $(t, q, \dot{q})$.

(i) Bereken de expliciete uitdrukking voor T in functie van $(t, q, \dot{q})$. Toon vervolgens aan dat de Lagrangevergelijkingen van de eerste soort kunnen opgelost worden naar de veralgemeende versnellingen en dus een stelsel tweede-orde differentiaalvergelijkingen opleveren in normale vorm $\ddot{q}_i = \varphi_i(t, q, \dot{q})$ (voor zekere functies φ_i).

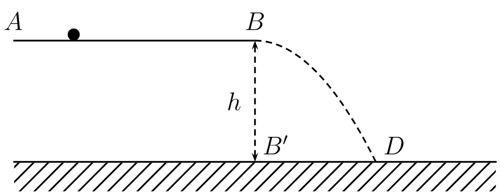
(ii) Indien de krachten afleidbaar zijn van een potentiële energiefunctie V, toon dan aan dat het stelsel Lagrangevergelijkingen van de eerste soort zich herleidt tot deze van de tweede soort in termen van de Lagrangiaan $L = T - V$ (waarbij we $V(t, q)$ kortweg schrijven voor $V(t, \mathbf{r}_1(t, q), \dots, \mathbf{r}_N(t, q))$.

(iii) Zij $f(t, q)$ een willekeurige differentieerbare functie van de veralgemeende coördinaten $(q_1, \dots, q_n)$ en de tijd. Toon aan dat $L(t, q, \dot{q})$ en $L'(t, q, \dot{q}) := L(t, q, \dot{q}) + (df/dt)(t, q, \dot{q})$ identiek dezelfde Lagrangevergelijkingen opleveren.

Oefeningen

O1. Een cirkelvormige schijf met middelpunt O roteert eenparig om een as door O loodrecht op het vlak van de schijf, met hoeksnelheid $\boldsymbol{\omega}_1$, waarbij $\omega_1 = \| \boldsymbol{\omega}_1 \|$ een constante is. Het vlak van de schijf wentelt zelf eenparig met constante hoeksnelheid $\boldsymbol{\omega}_2$ om een vaste rechte n door O in het vlak van de schijf. Een punt P verplaatst zich langs een straal OA van de schijf met een relatieve snelheid $\mathbf{v}_r$ waarvan de grootte v_r constant is. Bepaal de grootte van de absolute snelheid van P in functie van v_r, ω_1, ω_2 en t, indien op $t = 0$ de straal OA gelegen is langs de vaste rechte n, waarbij OA gericht is in de zin van $\boldsymbol{\omega}_2$, en P zich in O bevindt. Bepaal tevens de waarde van de absolute versnelling van P op $t = 2\pi/\omega_1$. (Aanwijzing: Kies een meebewegend referentiestelsel $(O; \mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z)$ zo dat het (x', y')-vlak samenvalt met het vlak van de schijf, waarbij de y'-as gelegen is langs de straal OA, en de z'-as in de richting van $\boldsymbol{\omega}_1$.)

O2. Een deeltje met massa m, onderworpen aan de zwaartekracht, glijdt in een ruwe horizontale gleuf AB met lengte ℓ, op een hoogte h boven de grond. Het deeltje vertrekt vanuit het punt A met een beginsnelheid $\mathbf{v}_0$ in de richting van B. De kinetische wrijvingscoëfficient bij deze binding is $\mu = \frac{1}{2}$.
(i) Bepaal de minimale waarde van $v_0 = ||\mathbf{v}_0||$ opdat het deeltje niet tot stilstand zou komen vooraleer het punt B te bereiken.
(ii) Indien het deeltje de gleuf in B kan verlaten, bepaal dan de grootte van de beginsnelheid (in A) opdat het deeltje op de grond zou neerkomen in een punt D op een afstand $\sqrt{2h}$ van het punt B' (voetpunt van de loodlijn uit B op de grond).
(iii) Bereken de tijd van de volledige beweging van A naar D, beschreven in (ii).



1) Niet vergeten: OP ELK BLAD UW NAAM VERMELDEN!!
2) Theorie en oefeningen moeten APART afgegeven worden.