Examen algebra I

2e kandidatuur wiskunde
30 augustus 1994, 8u30

It is foolish to answer a question that you do not understand
— G. Polya, How to solve it

Vragen

Zijn volgende uitspraken juist of fout ? Motiveer kort.

1. De kern van een ringmorfisme naar een veld is een priemideaal.
2. Als E/F een transcendente velduitbreiding is, dan is elk element in $E \setminus F$ transcendent over F. N
3. Elke eindige uitbreiding is algebraïsch, maar niet elke algebraïsche uitbreiding is eindig. J
4. Als $E/K/F$ velduitbreidingen zijn, en E/F is Galois, dan ook E/K en K/F. N
5. $\mathbb{Z}[i, X]$ is een UFD, maar geen HID.

Oefening 1

Stel dat j een wortel is van de veelterm

$$X^2 + X - 1 \in \mathbb{F}_3[X]$$

in een algebraïsche sluiting is van $\mathbb{F}_3$. Noteer $K = \mathbb{F}_3(j)$, en beschouw de veelterm

$$f(X) = X^4 + jX - j \in K[X].$$

Voor vraag 1 t.e.m. 5 mag je veronderstellen dat f irreducibel is over K.

1. Bewijs dat $K \cong \mathbb{F}_9$.
2. Stel de vermenigvuldigingstabel op voor K.
3. Stel dat α een wortel is van f in een algebraïsche sluiting van K.
   (a) Bewijs dat $L = K(\alpha)$ het splijtveld is van f.
   (b) Bepaal het aantal elementen van L.
   (c) Bepaal de Galoisgroep van f over K.
4. Bewijs dat er een uniek echt tussenveld E bestaat tussen K en L, en bepaal er een primitief element voor over K. Hierbij kunnen volgende gegevens van pas komen :

$$\begin{aligned} \alpha^{81} &= (1-j)\alpha^3 + \alpha^2 + (j-1)\alpha \\ \alpha^{162} &= \alpha^3 + (j+1)\alpha^2 + (j+1)\alpha \\ \alpha^{243} &= (j-1)\alpha^3 + (j+1)\alpha^2 + \alpha \end{aligned}$$

5. Bepaal het minimaalpolynoom van de uitbreiding E/K.
6. Bewijs dat f irreducibel is over K.

Oefening 2

Stel dat R een commutatieve ring met 1 is.

1. Bewijs dat voor alle $a \in R$ de verzameling

$$\mathrm{Ann}(a) = \{r \in R : ar = 0\}$$

   een ideaal is in R.

2. Bewijs dat als additieve groepen $R/\mathrm{Ann}(a) \cong (a)$. HID volgt... c ll ch a

3. Veronderstel verder

   (a) R heeft oneindig veel elementen.

   (b) Voor elk niet-nul ideaal I in R geldt dat R/I een eindige verzameling is.

   Bewijs onder deze voorwaarden :

   - Elk niet-nul ideaal in R is oneindig.
   - Alle priemidealen in R zijn maximaal.
   - R is een domein.

   Geef voorbeelden van ringen R van elke mogelijke karakteristiek, die *geen velden* zijn, en aan de voorwaarden (a) en (b) voldoen.

schets oplossingen examen algebra I 30/08/94,8u30

Vragen

1. JUIST Als $\phi : R \to k$ zo'n morfisme is met kern I, dan is $R/I \cong Im\phi$. Aangezien $Im\phi \subseteq K$, met K een veld, is $Im\phi$ een domein, dus ook R/I. Bijgevolg is I een priemideaal.
2. FOUT $\mathbb{Q}(\pi, i)$ is transcendent over $\mathbb{Q}$, maar i is algebraïsch over $\mathbb{Q}$.
3. JUIST Een eindige uitbreiding is algebraïsch wegens een stelling (2.4). Anderzijds is de algebraïsche sluiting van $\mathbb{Q}$ over $\mathbb{Q}$ algebraïsch, maar oneindig. Dit laatste omdat er uitbreidingen van $\mathbb{Q}$ bestaan van willekeurig grote graad, want er zijn irreducibele veeltermen over $\mathbb{Q}$ van willekeurige graad (gebruik bv. het criterium van Eisenstein voor $X^n - 2$). Je kan deze redenering ook eenvoudig doen met een eindig veld i.p.v. $\mathbb{Q}$.
4. FOUT Het loopt mis met de normaliteit. Bv. $\mathbb{Q}(\zeta_3, 2^{1/3})$ is Galois over $\mathbb{Q}$, maar $\mathbb{Q}(2^{1/3})$ is niet Galois over $\mathbb{Q}$.
5. JUIST $\mathbb{Z}[i]$ is een HID (zelfs ED), dus UFD. Uit het lemma van Gauss volgt dat $\mathbb{Z}[i][X]$ ook een UFD is. Anderzijds is echter $(2, X)$ geen hoofdideaal in $\mathbb{Z}[i, X]$.

Oefening 1

1. Het is voldoende te bewijzen dat $g(X) = X^2 + X - 1$ irreducibel is over $\mathbb{F}_3$, dus het is voldoende te bewijzen dat er geen wortel is (want de veelterm is van graad 2). Echter is $g(x) \neq 0, x = 0, 1, 2$.
2. Gebruik dat $j^2 = -j + 1$:

	j	$j+1$	$j-1$
j	$-j+1$	1	$j+1$
$j+1$	1	$j-1$	$-j$
$j-1$	$j+1$	$-j$	-1

We vermelden hier niet het gedeelte van de tabel voor $\{0, 1, 2\}$, en ook niet het gedeelte dat op een teken na hetzelfde is als deze tabel.

3. Alle uitbreidingen van een eindig veld zijn normaal, dus door toevoeging van 1 wortel heeft men alle wortels. Het splijtveld heeft 9^4 elementen, vermits f irreducibel is, en de Galoisgroep is C_4, voortgebracht door $x \mapsto x^9$.
4. De tussenvelden zijn in correspondentie met de deelgroepen van C_4, en zo is er maar 1, nl. de C_2 voortgebracht door $\sigma : x \mapsto x^{81}$. Het primitief element is van de vorm $x = c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + c_3\alpha^3$, en voldoet aan $x = \sigma(x)$. Dit geeft een stelsel met c_i als onbekenden, dat men oplost om te vinden dat $E = K(\alpha + (j+1)\alpha^2 + j\alpha^3)$.
5. Het minimaalpolynoom is kwadratisch. Schrijft men $x^2 + Ax + B = 0$, dan vindt men een waarde voor A, B, en dus de vergelijking $X^2 + j = 0$ voor x.

6. Dat er geen wortels zijn rekent men na met volgende tabel :

x	x^2	x^4	jx	$f(x)$
0	0	0	0	$-j$
1	1	1	j	1
-1	1	1	$-j$	$j+1$
j	$-j+1$	-1	$-j+1$	j
$j+1$	$j-1$	-1	1	$-j$
$-j$	$-j+1$	-1	$j-1$	1
$-j+1$	-1	1	$-j-1$	j
$j-1$	-1	1	$j+1$	-1
$-j-1$	$j-1$	-1	-1	$1-j$

Deze laatste kolom is nooit 0. Veronderstel vervolgens dat er een kwadratische factor is : $f(X) = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d)$, dan vindt men

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ c = -a \\ a^2 = b + d \\ a(d-b) = j \\ bd = -j \end{cases}$$

Bekijken we volgende tabel van mogelijke waarden voor b, d :

b	d	$b+d$	$b-d$	$a = (b+d)^{1/2}$	$a(d-b)$
-1	j	$j-1$	$j+1$	$\pm(j+1)$	$\pm(j-1)$
1	$-j$	$1-j$	$-j-1$	$\pm j$	± 1
$j-1$	$j+1$	$-j$			
$-j+1$	$-j-1$	j			

De laatste kolom is nooit $= j$; in de laatste twee rijen is $b + d$ geen kwadraat. Het stelsel heeft dus geen oplossingen.

Oefening 2

1. Als $r, s \in Ann(a)$ dan is $a.(r+s) = 0$, dus $r + s \in Ann(a)$, en als $t \in R$, dan is $atr = 0$.
2. Beschouw het morfisme van additieve groepen $R \to R : x \mapsto a.x$. Dit heeft als kern $Ann(a)$ en als beeld (a), dus de isomorfismestelling geeft het gevraagde.
3.
   - Als een ideaal $I \neq (0)$ eindig zou zijn, dan zou R/I oneindig zijn, een contradictie.
   - Stel P is een priemideaal, dan is R/P een domein, en bovendien eindig wegens eigenschap (b), dus is het een veld (zie oefeningenlessen : als $a \neq 0 \in R/P$, dan moet $\{a^i : i \in \mathbb{N}\}$ eindig zijn, dus is $a^i = a^j$ voor zekere $j < i$, en dus $a^{i-j-1}.a = 1$, dus a heeft een inverse). Bijgevolg is P maximaal.
   - We moeten bewijzen dat $Ann(a) = (0)$ voor alle $a \neq 0$. Veronderstel dat $Ann(a) \neq (0)$ is, dan is $R/Ann(a)$ eindig (eigenschap (b)), en dus (a) eindig (zie 2). Uit het eerste punt volgt dan dat $a = 0$.

In karakteristiek 0 is bv. $\mathbb{Z}$, in karakteristiek $p > 0$ is de veeltermenring $\mathbb{F}_p[X]$ een voorbeeld. Quotiënten naar echte idealen hiervan zijn eindige uitbreidingen van $\mathbb{F}_p$.