

Examen Discrete Wiskunde, 29 augustus 2014

Theorie

- 2 (1) Is de volgende bewering correct: Onderstel dat X een verzameling is zodanig dat er een bijectie bestaat tussen X en \mathbb{Z} . Dan bestaat er steeds een bijectie tussen X en \mathbb{R} . Leg uit waarom wel of waarom niet.
- (2) 1(a) Wanneer worden drie gebeurtenissen X , Y en Z onafhankelijk genoemd?
- 1 (b) Als X_1 en X_2 onafhankelijke gebeurtenissen zijn, toon dan aan dat X_1 en X_2^C eveneens onafhankelijke gebeurtenissen zijn.
- 1 (c) Als X , Y en Z drie onafhankelijke gebeurtenissen zijn, toon dan aan dat X , Y en Z^C eveneens onafhankelijke gebeurtenissen zijn.
- (3) Bestaat er voor de volgende machtreeksen $f(x)$ en $g(x)$ een formele machtreeks $h(x)$ zodat $f(x) = g(x) \cdot h(x)$. Beantwoord deze vraag voor elk van de volgende gevallen:
- 1 • $f(x) = 1 + x$ en $g(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \dots$
 - 1 • $f(x) = x^2 + x^3$ en $g(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$
 - 1 • $f(x) = x^4 + x^5$ en $g(x) = 5x^5 + 6x^6 + 7x^7 + 8x^8 + \dots$
- 2 (4) Op pagina 109 staat: "In dit geval is $a_n = n \cdot r^n = n \left(\frac{\lambda_1}{2}\right)^n$ een oplossing van de recurrente betrekking (5.6)". Toon dit aan.

Oefeningen

Vraag 1. Beschouw volgend probleem: "Hoeveel drietallen gehele getallen (a, b, c) met $a \in [-1, 2]$ en $b, c \in [1, 4]$ zijn er waarvoor $a + b + c = 6$?"

- (a) (2pt) Schrijf het probleem als een probleem van genererende functies ("Bepaal de coëfficiënt van x^6 in ...")
- (b) (3pt) Los het probleem uit (a) op.

Vraag 2. Voor elk natuurlijk getal $n \neq 0$, noteren we door $d(n)$ het aantal natuurlijke delers van n , i.e. $d(n) = |\{k \in \mathbb{N} : k \mid n\}|$.

- (a) (2pt) Toon aan dat als $n > 0$ het kwadraat van een natuurlijk getal is, $d(n)$ altijd oneven is.
- (b) (1pt) Toon via inductie aan dat $2x + 1 \leq 3^x$ voor alle natuurlijke getallen $x \geq 1$.
- (c) (2pt) Bepaal alle natuurlijke getallen $n > 0$ waarvoor $n = (d(n))^2$.