# Notities
# Analyse II

Daan Pape
2e bach informatica Ugent

6 januari 2013

# 1 Rijen en reeksen van reele functies

Notatie:

- $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$: alle reëelwaardige functies gedefinieerd op de verzameling $E$.
- $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$: alle continue reëelwaardige functies gedefinieerd op de metrische ruimte $E$.
- $\mathcal{C}^k(E, \mathbb{R})$: alle reëelwaardige functies gedefinieerd op de verzameling $E$ die $k$ keer afleidbaar zijn met continue afgeleiden.
- $\mathcal{C}^\infty(E, \mathbb{R})$: alle reëelwaardige functies gedefinieerd op de verzameling $E$ die oneindig afleidbaar zijn.

Formule voor **Taylorpolynoom** $T_{f,a,n}$ van graad $n$ in het punt $a$ van de functie $f$:

$$T_{f,a,n}(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}Df(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}D^2f(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}D^nf(a) \tag{1}$$

$$T_{f,a,n}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-a)^i}{i!}D^if(a)$$

Het **MacLaurin-polynoom** is gelijk aan het Taylorpolynoom van $f$ in punt 0 van graad $n$.

Zo'n functiebenaderingen bevatten een fout $R_n(x) = f(x) - T_{f,a,n}(x)$ die we de sluitterm noemen. We zullen twee benaderingen met sluitterm zien, stel nu dus

$$f(x) = T_{f,a,n}(x) + R_n(x)$$

dan wordt de sluitterm $R_n(x)$ gegeven door:

1. **Lagrange sluitterm**:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}D^{n+1}f(\epsilon) \quad \text{met } \epsilon \text{ gelegen tussen } a \text{ en } x \tag{2}$$

2. **Cauchy sluitterm**:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n D^{n+1}f(a+\theta(x-a)) \quad \text{met } \theta \in ]0,1[ \tag{3}$$

De rij van opeenvolgende Taylorpolynomen is convergent naar $f(x)$ als en slechts dan als $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$. We noemen formule 1 de **Taylorreeks** als we $n$ naar $\infty$ laten gaan, het zelfde geldt voor de **Maclaurinreeks**:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-a)^i}{i!}D^if(a) \tag{4}$$

Er is een belangrijke stelling die de voldoende voorwaarde waaronder een functie voorgesteld kan worden door haar Taylorreeks beschrijft:

- Stel: $f \in \mathcal{C}^{\infty}(I, \mathbb{R}), a \in I$
- Als: $(\exists K > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in I)(|D^n f(x)| \leq K)$
- Dan kan men de Taylorreeks uit formule 4 beschouwen.

Nemen we de sluitterm van lagrange uit formule 2 en houden we rekening met het onderstelde, dan vinden we:

$$|R_n(x)| = \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}|D^{n+1}f(\lambda_x)| \leq K\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

De reeks $\sum \frac{a^n}{n!}$ is convergent $\forall a \in \mathbb{R}$ zodat haar algemene term tot 0 nadert. Dus volgt uit bovenstaande ongelijkheid dat $\lim_{x \to +\infty} R_n(x) = 0$ en dus het gestelde. $\square$

Taylor- en Maclaurinreeksen zijn speciale **machtreeksen** welke in het algemeen van de vorm:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (x - x_0)^n, \quad \text{met } a_n \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Voor elke machtreeks rond $x_0 \in \mathbb{R}*$ geldt precies één van volgende uitspraken:

(i) $(\forall x \in \mathbb{R})(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n)$ is absoluut convergent.

(ii) $(\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{x_0\})(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n)$ is niet convergent.

(iii) $(\exists \rho > 0)(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n)$ is absoluut convergent als $|x - x_0| < \rho$.

(iv) $(\exists \rho > 0)(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n)$ is niet convergent als $|x - x_0| > \rho$.

We definiëren de **convergentiestraal** van $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n$ als:

- $+\infty$ als (i) geldt.
- 0 als (ii) geldt.
- $\rho$ als (iii) geldt.

en het corresponderend **convergentieïnterval** van $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n$ als:

- $\mathbb{R}$ als (i) geldt.
- $\emptyset$ als (ii) geldt.
- $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ als (iii) geldt.

Het al dan niet convergeren van $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n$ in de punten $-\rho$ en $\rho$ moet afzonderlijk onderzocht worden. Het **convergentiegebied** zijn alle elementen in het convergentieïnterval. We zien nu twee praktische methoden om de convergentiestraal van machtreeksen te bepalen. Onderstaande testen geven echter geen uitsluitsel over de convergentie in de eindpunten $-\rho$ en $\rho$.

1. **Verhoudingstest van d'Alembert**: stel $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal $\rho$ waarvoor geldt dat $(\exists m \in \mathbb{N}^*)(\forall n \in [m, +\infty[)(a_n \neq 0)$ en stel verder:

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda \quad \text{ met } \lambda \in [0, +\infty]$$

   dan geldt:

   - $\lambda = 0 \Rightarrow \rho = +\infty$
   - $\lambda \in ]0, +\infty[ \Rightarrow \rho = \frac{1}{\lambda}$
   - $\lambda = +\infty \Rightarrow \rho = 0$

2. **Worteltest van Cauchy**: stel $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal $\rho$ en stel dat:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda \quad \text{ met } \lambda \in [0, +\infty]$$

   dan geldt:

   - $\lambda = 0 \Rightarrow \rho = +\infty$
   - $\lambda \in ]0, +\infty[ \Rightarrow \rho = \frac{1}{\lambda}$
   - $\lambda = +\infty \Rightarrow \rho = 0$

Afgeleide $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n x^{n-1}\right)$ machtreeksen en geïntegreerde $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}\right)$ machtreeksen hebben dezelfde convergentiestraal als de originele machtreeks $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n\right)$.

We sommen nu kort enkele eigenschappen van machtreeksen op:

1. De reekssomfunctie van een machtreeks is continu over haar convergentieïnterval.

2. Stel $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestral $\rho \in ]0, +\infty]$ en $f$ de corresponderende reekssomfunctie, m.a.w:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad \forall x \in ]-\rho, \rho[$$

   dan geldt:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(a_n = \frac{D^n f(0)}{n!}\right)$$

| Wiskundige vorm | Wiskundige naam | Convergentie |
|---|---|---|
| $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n}$ | Harmonische wisselreeks | Convergent als en slechts als de reeks kleiner wordt en de absolute waarde naar 0 gaat. |
| $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ | Harmonische reeks | Divergent |

Tabel 1: Enkele veel voorkomende reeksen en hun convergentie

Een eigenschap stelt dat de convergentiestraal van $\sum a_n x^{2n}$ gelijk is aan de convergentiestraal van $\sum a_n x^{2n+1}$.

In de signaalanalyse, bijvoorbeeld om spectrum analysers te maken, wordt voortdurend gebruik gemaakt van **Fouriertransformaties**. We definiren nu enkele types van functies:

- Een **stuksgewijs continue** functie is een functie die continu is uigezonderd op een eindig aantal sprongpunten. De verzameling van $\mathbb{R} - \mathbb{R}$ functies die stuksgewijs continu zijn over $[a, b]$ noteren we met $\mathcal{PC}([a, b], \mathbb{R})$.
- Een **stuksgewijs gladde** functie is een functie waarvan de eerste afgeleide stuksgewijs continu is. De verzameling van $\mathbb{R} - \mathbb{R}$ functies die stuksgewijs glad zijn over $[a, b]$ noteren we met $\mathcal{PC}^1([a, b], \mathbb{R})$.

De **stelling van Fourier** is essentieel voor heel wat toepassingen en maakt het mogelijk om effectief **Fourierreeksen** op te stellen. Er zijn 3 voorwaarden waaraan een functie $f(x)$ moet voldoen opdat je hem als Fourierreeks zou kunnen schrijven:

1. De functie $f(x)$ moet integreerbaar zijn op een interval ter grootte van 1 periode.
2. Het aantal discontinuïteiten van $f(x)$ moet eindig zijn op dat interval. $f(x)$ is stuksgewijs continu.
3. De afgeleide van $f(x)$ mag op een eindig aantal punten op dat interval discontinu zijn. $f(x)$ is stuksgewijs glad.

De Fourierreeks schrijft een functie als een som van sinussen en cosinussen omdat deze **orthogonaal** zijn tegenover elkaar. De formules werden afgeleid door middel van de kleinste kwadratenmethode omdat men niets anders doet dan de coëfficienten van de sinussen en cosiniussen zo kiezen zodanig dat de reeks zo dicht mogelijk bij de originele functie ligt. De methode waarmee men de sinussen en cosinussen loodrecht laat naderen tot de gevraagde functie noemt men de **kleinste kwadratenmethode** en om loodrecht te naderen gebruikt men het **inproduct**.

De stelling van Fourier zegt dat men een periodieke functie $f$ met periode $2\pi$ kan schrijven als:

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \tag{6}$$

waarbij de Fouriercoëfficiënten $a_i$ en $b_i$ vna $f$ gegeven worden door:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Hieruit volgt meteen dat als $f$ even is alle $b_n = 0$ en

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

en dat als $f$ oneven is alle $a_n = 0$ en

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Meer algemeen stellen we dat we een periodieke functie $f$ met periode $\omega$ kunnen schrijven als:

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{\omega} x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{\omega} x\right) \tag{7}$$

waarbij de Fouriercoëfficiënten $a_i$ en $b_i$ vna $f$ gegeven worden door:

$$a_n = \frac{2}{\omega} \int_{0}^{\omega} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{\omega} x\right) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{2}{\omega} \int_{0}^{\omega} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{\omega} x\right) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Omdat een Fourierreeks uit sinussen en cosinussen bestaat is het een **continue** functie die **onbepaald afleidbaar** is.

## 2 Meervoudige integralen

We herhalen eerst enkele regels voor enkelvoudige integralen. Het **partiëel integreren** gaat als volgt. Als $f$ en $g$ twee afleidbare functies zijn met afgeleiden $f'$ en $g'$ dan geldt:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \tag{8}$$

Een andere belangrijke truc is het **splitsen is partieelbreuken** van de veeltermbreuk, er zijn 4 vormen van partieelbreuken:

$$\frac{A}{x-a} \qquad \frac{A}{(x-a)^n} \qquad \frac{Ax+B}{x^2+bx+c} \qquad \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n}$$

De methode om elke veeltermbreuk als een som van partieelbreuken te schrijven gaat nu als volgt:

1. Ontbind de noemer in zoveel mogelijk reëele factoren van de eerst of tweede graad.

2. Deel teller en noemer door een gepast getal zodat in de noemer alleen nog factoren van de vorm $(x-a)^n$ of $(x^2+bx+c)^n$ voorkomen.

3. Deze echte breuk kan geschreven worden als een som van partieelbreuken. De aard en het aantal partieelbreuken is afhankelijk van de gevonden factoren in de noemer. Elke factor $(x-a)^n$ veroorzaakt een som van de volgende vorm:
$$\frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-a)^3} + \cdots + \frac{L}{(x-a)^n} \tag{9}$$
Elke factor $(x^2+bx+c)^n$ verzoorzaakt een som van de volgende vorm:
$$\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)} + \frac{Cx+D}{(x^2+bx+c)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+bx+c)^3} + \cdots + \frac{Lx+M}{(x^2+bx+c)^n} \tag{10}$$

4. De onbekende tellers worden achteraf met een stelsel berekend.

Een **oneigenlijke integraal** is een limiet van integralen waarvan de ondergrens naar $-\infty$ nadert of de bovengrens naar $+\infty$ of één van beide integratiegrenzen een punt nadert waar de integrand niet gedefinieerd is.

Daar waar de Fourierreeks enkel kan worden opgesteld van periodieke functies kan de **Fourier-transformatie** ook van niet periodieke functies worden opgesteld. We voeren nu volgende notaties in:

- De Fouriergetransformeerde functie: $\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$

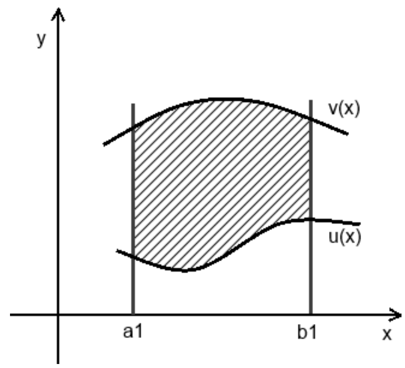
- De geadjungeerde Fouriergetransformeerde functie: $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t}dt$

Het fundamentele resultaat, vergelijkbaar met de stelling van Fourier, is dat men kan bewijzen dat
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{11}$$

Hierbij is $\tilde{\tilde{f}}(\omega)$ dus de functie uitgedrukt in het frequentiedomein en $f(t)$ de functie uitgedrukt in het tijdsdomein.

**Dubbelintegralen** kunnen opgevat worden als de limiet van een sommatie over een oppervlak. We berekenen deze integralen door ze te projecteren op de $x$-as of $y$-as en bekomen dus volgende normaalgebieden:

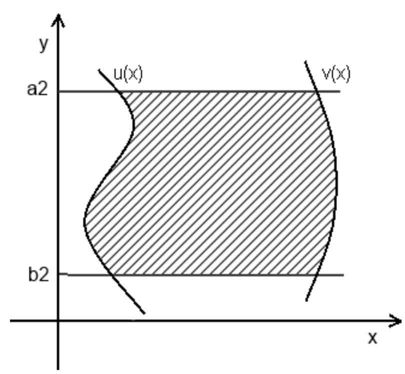
1. Normaalgebied t.o.v. $x$-as: $S = O_{u,v}$ waarbij $u(x)$ en $v(x)$ functies zijn.




Als $u(x) \leq v(x)$ over $[a1, b1]$ dan is

$$\int\int_S f(x,y)dxdy = \int_{a1}^{b1} dx \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy \tag{12}$$

2. Normaalgebied t.o.v. $y$-as: $S = \Omega_{u,v}$ waarbij $u(y)$ en $v(y)$ functies zijn.




Als $u(y) \leq v(y)$ over $[a2, b2]$ dan is

$$\int\int_S f(x,y)dxdy = \int_{a2}^{b2} dy \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx \tag{13}$$

De integratiegrenzen van $f(x,y)$ kunnen ook rechtstreeks gegeven zijn als $[a,b] \times [d,e]$ waarbij de volgorde van de functie-argumenten aanduidt in welke volgorde geïntegreerd moet worden.

# 3 Gewone differentiaalvergelijkingen

Een **gewone differentiaalvergelijking** (DV) is een vergelijking met als onbekende een functie en in de vergelijking minstens één voorkomen van een afgeleide van de onbekende functie.

Een $n$**-dimensionale schaar** van vlakke krommen is een verzameling relaties van de vorm

$$\{(x,y)|f(x,y,c_1,c_2,\ldots,c_n) = 0\} \tag{14}$$

waarbij $f$ een gegeven $\mathbb{R}^{n+2} - \mathbb{R}$ functie is en $c_1, c_2, \ldots, c_n$ reële waarden aannemen. Zo is

$$x^2 + y^2 = c \quad \text{met } c \in ]0, +\infty[$$

een schaar van concentrische cirkels met centrum $(0,0)$ en straal $\sqrt(c)$. Van zo'n $n$-dimensionale schaar kan vaak een DV van de $n^e$ orde worden opgesteld waarvan de schaar precies de oplossingen bevat. Methode:

1. Leidt de schaar $n$ keer af.
2. Elimineer de $n$ parameters (dus de $c$'s) uit de $n+1$ vergelijkingen, meestal door substitutie.

Een **orthogonale baan** van een schaar is en kromme die alle krommen in de schaar loodrecht snijdt. Deze orthogonale banen bepaal je door de DV op te stellen en de eerst afgeleiden (rico's) te vervangen door $-\frac{1}{y'}$. Dan moet de D.V. terug geïntegreerd worden.

In volgend overzicht geven we de soorten differentiaalvergelijkingen en rijken we een praktische oplossing aan:

- **DV met gescheiden veranderlijken**: deze DV is van de vorm:

$$y' = g(x)h(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx \tag{15}$$

  Om de DV. op te lossen stellen we de integralen van linker- en rechterkant gelijk aan elkaar, dit geeft meteen de algemene oplossing:

$$\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx \tag{16}$$

- **Homogene DV**: deze DV is van de vorm:

$$y' = f(x,y) \tag{17}$$

  waarbij $f(x,y)$ homogeen is (d.w.z. als je het plot in maple zal je ongeveer een rechte door de oorsprong zien). We lossen deze op door volgende stappen uit te voeren:

  1. Voer op de vgl de substitutie $u = \frac{y}{x}$ door, dit kan simpel door te stellen:
     - $y' \to u'x + u$
     - $x \to 1$
     - $y \to u$
  2. Los de verkregen vgl op alsof het een DV met gescheiden veranderlijken zou zijn.
  3. Substitueer de $u$ in de oplossing terug naar $\frac{y}{x}$.

- Lineaire DV van de eerste orde: deze DV is van de vorm:

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{18}$$

  De oplossing wordt meteen gegeven door:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left(c + \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx\right) \tag{19}$$

- **Exacte DV**: deze DV is van de vorm:

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0 \tag{20}$$

waarbij geldt dat $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ (exact gelijk!!). We lossen op in volgende stappen:

  1. Controleer de exactheid met $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$
  2. Stel volgende gelijkheden op

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \tag{21}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) \tag{22}$$

  3. Bereken $F(x,y)$ door

$$F(x,y) = \int P(x,y)dx + c(y) \tag{23}$$

  4. Leidt de bekomen $F(x,y)$ partieel af naar $y$ en stel de bekomen functie gelijk aan $Q(x,y)$. Deze vergelijking los je op naar $\dfrac{dc}{dy}(y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dc}{dy}(y) \tag{24}$$

  5. Integreer de bekomen $\dfrac{dc}{dy}(y)$ over $y$ om zo $c(y)$ te bekomen:

$$c(y) = \int \frac{dc}{dy}(y)dy \tag{25}$$

  6. De oplossing wordt nu gegeven door $c(y)$ in te vullen in $F(x,y)$ bekomen in formule 23.

- **Gereduceerde lineaire DV van de 2de orde**: Deze DV is van de vorm

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{26}$$

Om deze vergelijking op te lossen stellen we de *karakteristieke vergelijking op* welke dus van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ is. De wortels van de karveelt geven dan aanleiding tot volgende delen van de oplossing:

  - De wortel heeft multipliciteit 1 en is van de vorm:
    * $\mathbb{R}(a) + \mathbb{C}(b)$ geeft aanleiding tot:

$$c_1e^{ax}cos(bx) \tag{27}$$

    * $\mathbb{R}(a) - \mathbb{C}(b)$ geeft aanleiding tot:

$$c_1e^{ax}sin(bx) \tag{28}$$

- De wortel heeft multipliciteit $n$ en is van de vorm:
  * $\mathbb{R}(a) + \mathbb{C}(b)$ geeft aanleiding tot:

$$\phi_1 = c_1 e^{ax} cos(bx) x^0, \quad \phi_2 = c_1 e^{ax} cos(bx) x^1, \ldots \tag{29}$$

  * $\mathbb{R}(a) - \mathbb{C}(b)$ geeft aanleiding tot:

$$\phi_1 = c_1 e^{ax} sin(bx) x^0, \quad \phi_2 = c_1 e^{ax} sin(bx) x^1, \ldots \tag{30}$$

De som van alle $\phi_n$ geeft dan de algemene oplossing van de DV.

- **Lineaire DV van de 2de orde**:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x) \tag{31}$$

Om deze DV op te lossen voeren we volgende stappen uit:

1. We lossen de gereduceerde vorm van de DV op.
2. We bepalen een particuliere oplossing van de DV.
3. De oplossing wordt nu gegeven door de som van deze twee.

De **Wronskiaan** van twee functies $f_1$ en $f_2$ geeft aan of ze een fundamenteel stel oplossing zijn van een DV, dit is het geval als geldt:

$$W = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ Df_1(x) & Df_2(x) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{32}$$

# 4 De Laplacetransformatie

De **Laplacetransformatie** $\mathcal{L}$ is een manier om lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficienten op te lossen. Er kan voor gekozen worden om de beginvoorwaarden meteen mee te nemen in het probleem. De laplacetransformatie is:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(x)](s) = \int_0^\infty f(x) e^{-sx} dx \tag{33}$$

waarbij

$$\int_0^\infty g(x)dx = \lim_{B\to\infty} \int_0^B g(x)dx \tag{34}$$

De Laplacetransformatie is lineair en dus geldt:

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)](s) = c_1 \mathcal{L}[f_1(x)](s) + c_2 \mathcal{L}[f_2(x)](s) \tag{35}$$

Een andere eigenschap stelt dat als $\mathcal{L}[f(x)](s) = F(s)$ bestaat voor $s > s_0$ dan bestaat

$$\mathcal{L}[e^{ax} f(x)] = F(s-a) \tag{36}$$

voor $s > s_0 + a$.

Volgende tabel geeft de Laplacegetransformeerden en inverse laplacegetransformeerden van elementaire functies:

| $f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ | $F(s) = \mathcal{L}[f(x)]$ | |
|---|---|---|
| $e^{ax}$ | $\frac{1}{s-a}$ | voor $s > a$ |
| $1$ | $\frac{1}{s}$ | voor $s > 0$ |
| $x^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ | voor $s > 0$ |
| ($n$ positief en geheel) | | |
| $sin(bx)$ | $\frac{b}{s^2+b^2}$ | voor $s > 0$ |
| $cos(bx)$ | $\frac{s}{s^2+b^2}$ | voor $s > 0$ |
| $sinh(bx)$ | $\frac{b}{s^2-b^2}$ | voor $s > \|b\|$ |
| $cosh(bx)$ | $\frac{s}{s^2-b^2}$ | voor $s > \|b\|$ |
| $x^n e^{ax}$ | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ | voor $s > a$ |
| ($n$ positief en geheel) | | |
| $e^{ax} sin(bx)$ | $\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$ | voor $s > a$ |
| $e^{ax} cos(bx)$ | $\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$ | voor $s > a$ |
| $e^{ax} sinh(bx)$ | $\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$ | voor $s > \|b\| + a$ |
| $e^{ax} cosh(bx)$ | $\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$ | voor $s > \|b\| + a$ |

De **Laplacegetransformeerde van de $n$-de orde afgeleide** wordt gegeven door:

$$\mathcal{L}[y^{(n)}(x)](s) = -y^{(n-1)}(0) - sy^{(n-2)}(0) - \cdots - s^{n-1}y(0) + s^n\mathcal{L}[y(x)](s) \quad (37)$$

# 5 Maple truucjes

We sommen hier enkele handige maple commando's op:

| Maple commando | Uitleg |
|---|---|
| `diff(f(x), ‘$‘(x, n))` | Berekent de $n$-de afgeleide op een symbolische manier. |
| `taylor(f(x),x=a,n)` | Berekent de taylorreeks in het punt $a$ van de graad $n$ van $f(x)$. |
| `convert(f,parfrac)` | Zet de rationale breuk $f$ om naar een som van partieelbreuken. |
| `scaling=constrained` | Gebruik georthonormeerde assen. |
| `diff(y(x),x,\ldots,x)` | Bepaalt de $n$-de afgeleide. |
| `laplace(f(x),x,s)` | Berekent laplacetransformatie, zit in *inttrans* |