Antwoorden op de theorie vragen van het examen in juni.

AB-Vraag 1. Juist of fout? (Argumenteer je antwoord.) Een Möbius transformatie wordt volledig bepaald door zijn fixpunten.

AB-Antwoord: De uitspraak is fout. Een goed argument bestaat erin van het gegeven van een tegenvoorbeeld. De Möbius transformatie uit de oefening zal een tegenvoorbeeld geven zoals elke Möbius transformatie die niet de identieke afbeelding is. Immers een Möbius transformatie die niet de identieke afbeelding is heeft hoogstens twee fixpunten. Zij P, Q de fixpunten van een Möbius transformatie. Kies twee willekeurige niet gelijke punten, R, S, die ook verschillend zijn van de fixpunten P, Q. Dan is er een Möbius transformatie die P op P, Q op Q en R op S afbeeldt. Vermits er oneindig veel keuzes zijn voor de punten R en S, zijn er dus oneindig veel Möbius transformaties met als fixpunten P en Q.

AB-Vraag 2. Juist of fout? (Argumenteer je antwoord.) Als A een Markov matrix is dan is elke toegevoegde $P^{-1}AP$ van A ook een Markov matrix.

AB-Antwoord: De uitspraak is fout. Bijvoorbeeld de Markov matrix A uit de oefening geeft een tegenvoorbeeld. Immers A is diagoniliseerbaar, dus voor een P is $P^{-1}AP$ een diagonaalmatrix. Die diagonaalmatrix is geen Markov matrix omdat niet alle diagonaalelementen gelijk zijn aan 1.

AB-Vraag 3. Geef de transitiematrix van de standaardbasis naar de basis

$$\begin{aligned} v_1 &= (2,2,1)^t \\ v_2 &= (1,0,1)^t \\ v_3 &= (5,-1,1)^t \end{aligned}$$

uit oefening 3.

AB-Antwoord: De transitiematrix van de basis $\mathcal{B}$ naar de basis $\mathcal{B}'$ (Definitie 3.23) heeft als kolommen de coördinaatvectoren van de basisvectoren in $\mathcal{B}'$ ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$. Dus

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

is de gevraagde transitiematrix.

AB-Vraag 4. Zij S een lineaire operator op een euclidische ruimte E, met inproduct $\langle -, - \rangle$, zodat voor alle $v, w \in E$

$$\langle Sv, w \rangle = \langle v, Sw \rangle.$$

Bewijs dat de matrix voorstelling van S ten opzichte van een orthonormale basis voor E een symmetrische matrix is.

De matrixvoorstelling van S ten opzicht van een orthonormale basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ heeft als kolommen de coördinaatvectoren van $S(e_i)$ ten opzichte van de basis $\{e_1, \dots, e_n\}$. De coördinaten van $S(e_i)$ worden gegeven door het inproduct $\langle S(e_i), e_j \rangle$. Voor de ij-de component van de matrix van S vinden we

$$\langle S(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, S(e_j) \rangle = \langle S(e_j), e_i \rangle,$$

het rechterlid is de ji-de component van S. De matrixvoorstelling van S is dus een symmetrische matrix.

CD-Vraag 1. Geef een voorbeeld van een Möbius transformatie op $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ met maar 1 fixpunt.

Antwoord: Een translatie $T : z \mapsto z + b$ is een Möbius transformatie met enkel ∞ als fixpunt. Als je een voorbeeld wil waarbij het enige fixpunt niet het punt op oneindig is, neem je een Möbiustransformatie S die het punt op oneindig afbeeldt op een ander punt en beschouw je de samenstelling STS^{-1}.

CD-Vraag 2. Juist of fout? (Argumenteer je antwoord). Zij L een lineaire operator op een n-dimensionale vectorruimte V. Als een matrix voorstelling van L een Markov matrix is dan heeft L een eigenvector met eigenwaarde 1.

Antwoord: Het antwoord is juist. Eigenwaarden zijn invarianten van lineaire operatoren en hangen dus niet af van de matrixvoorstelling van de operator.

Vraag 3. Juist of fout? (Argumenteer je antwoord). De rotaties in de Euclidische 3-dimensionale ruimte E^3 rond een zelfde as vormen een commutatieve deelgroep van de speciale orthogonale groep.

Antwoord: De samenstelling van twee rotaties rond dezelfde as is opnieuw een rotatie rond die as (de as wordt bepaald door de vectoren die vast gelaten worden onder de rotatie). De inverse van een rotatie rond een as is een rotatie rond dezelfde as. Dit impliceert dat de rotaties rond een vaste as een deelgroep vormen van de groep van alle rotaties en dat is de speciale orthogonale groep.
We moeten nog opmerken dat de groep commutatief is. De rotatie rond een zelfde as komen overeen met de rotaties van het vlak loodrecht op die as, de groep van de rotaties van het vlak is commutatief (lemma 5.27).

Vraag 4. Gegeven $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^3$ de coördinaatvectoren, ten opzichte van de standaardbasis, van twee lineair onafhankelijke vectoren in de euclidisch ruimte E^3. Zij W het vlak opgespannen door B_1 en B_2 en $W^\perp$ het orthogonaal complement van W. Waarom is $W^\perp$ een 1-dimensionale ruimte?
Zij $A \in \mathbb{R}^3$ de coördinaatvector ten opzichte van de standaardbasis van een niet-nul vector in $W^\perp$, toon aan dat de linksvermenigvuldigen met A^t een lineaire operator definieert op E^3 met kern W.

Antwoord: Stelling 6.11 stelt dat $E^3 = W \oplus W^\perp$, dus de dimensie van $W^\perp$ is het verschil van de dimensie van E^3 en de dimensie van W. Dit verschil is 1.
Vermits $A^tA \neq 0$ volgt dat de kern van A^t niet de ganse E^3 kan zijn. De kern is dus hoogstens een 2 dimensionale deelruimte. De kolomvector A staat loodrecht op vectoren van W dus $A^tC = 0$ voor alle vectoren C in W. Dit toont dat de kern van A^t de tweedimensionale ruimte W bevat. Vermits $\dim \ker A^t \leq 2$ impliceert dit dat de kern gelijk is aan W.

EF-Vraag 1. Gegeven drie of meer punten in het vlak die niet op een rechte liggen. In voorbeeld 6.31 pagina 131 van de nota's werd uitgelegd hoe door de methode van de kleinste-kwadraten (lineaire regressie) de "beste" rechte kan bepaald worden die door die punten gaat. Geef een argument waarom de oplossing van dit kleinste-kwadraten probleem uniek is.

Antwoord: Een kleinste-kwadraten probleem $AX = d$ heeft een unieke oplossing als de matrix A maximale rang heeft. We moeten dus inzien dat de matrix A die komt van een lineair regressie probleem maximale rang heeft als het probleem bepaald wordt door minstens drie punten die niet op een rechte liggen.
Als de punten gegeven worden door de coördinaten (a_i, b_i) dan is de matrix A van het kleinste-kwadraten probleem deze met in de eerste kolom allemaal enen en in de tweede kolom de x-coördinaten a_i. De a_i's kunnen niet allemaal gelijk zijn vermits anders de punten op de rechte $x = a_i$ zouden liggen. De twee kolommen van A zijn dus lineair onafhankelijk, de rang van A is dus maximaal (gelijk aan 2).

EF-Vraag 2. Zij A een Markov matrix. Bewijs dat elke macht van A, A^n ook een Markov matrix is.

Antwoord: Er zijn verschillende argumenten mogelijk.
A^n is de matrix van het Markov-proces beschreven door A, A^n, geeft de evolutie aan na n-stappen. De matrix van een Markov proces is een Markov matrix.

Je kan ook de technische definitie van Markov-matrix gebruiken. Dan moet je aantonen dat de som van de elementen in een kolom van A^n gelijk is aan 1 en dat alle elementen getallen zijn in het interval $[0, 1]$. Merk op dat vermits A een Markov-matrix is,

$$(1, \ldots, 1)A = (1, \ldots, 1),$$

dus ook (per inductie)

$$(1, \ldots, 1)A^n = (1, \ldots, 1).$$

Dit toont dat de som van de elementen in een kolom van A^n gelijk is aan 1.
Nu zijn de elementen van A getallen tussen $[0, 1]$ de elementen van A^2 bekom je door elementen van A te vermenigvuldigen en op te tellen de resultaten moeten dus ook positieve getallen zijn. Per inductie volgt dat de elementen van A^n positieve getallen zijn. Deze getallen moeten tussen $[0, 1]$ liggen omdat de som van de elementen in een kolom gelijk is aan 1.

EF-Vraag 3. Juist of fout? (Argumenteer je antwoord). Zij A de matrix van een beweging die de oorsprong invariant laat. Dan is A gelijk aan het product van een diagonaalmatrix en een orthogonale matrix met determinant gelijk aan 1.

Antwoord: Als $\det A = 1$ dan is A een rotatie. De uitspraak is dan juist, voor de diagonaalmatrix kunnen we de eenheidsmatrix kiezen.
Zij $\det A = -1$ (de enige andere mogelijkheid voor een beweging). Kies een diagonaalmatrix D met één element op diagonaal gelijk aan -1 en alle andere elementen op de diagonaal gelijk aan 1. D is de matrix van een reflectie. De matrix $B = D^{-1}A$ is een beweging en de determinant van deze matrix is 1 dus B is de matrix van een rotatie. Verder is $A = DB$.
De uitspraak is dus juist.

EF-Vraag 4. Juist of fout? (Argumenteer je antwoord). Als je de orthogonale basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ in oefening 3 (1) correct geconstrueerd hebt en B is de matrix met als kolommen de (coördinaat) vectoren b_1, b_2, b_3, dan is B^tB een diagonaalmatrix met positieve elementen op de diagonaal.

Antwoord: Merk op dat de basis orthogonaal is maar niet noodzakelijk orthonormaal. In het algemeen zal dus $B^t \neq B^{-1}$. Wel geldt dat de elementen van B^tB overeenkomen met het inproduct van twee kolommen van B. Dit inproduct is nul als de kolommen verschillen vermits die kolommen de coördinaatvectoren zijn (ten opzichte van de standaard orthonormale basis) van de elementen uit $\mathcal{B}$. De matrix B^tB is dus een diagonaalmatrix. Op de diagonaal staat het inproduct van een vector met zichzelf, vermits het inproduct positief definiet is volgt dat de elementen op de diagonaal positief zijn.