Oplossingen examen Discrete Wiskunde

eerste zittijd 2010-2011

31 januari 2011

Oefening 1. Hoeveel permutaties van de 26 letters van het alfabet bevatten[1] geen enkele van de vier woorden: *left, right, top, bottom*?

Oplossing. Een permutatie kan duidelijk nooit *bottom* bevatten, gezien de letters 'o' en 't' hierin tweemaal voorkomen. Dit woord in de lijst mogen we dus verder gewoon negeren.

Noteer A_1, A_2, A_3 respectievelijk de verzameling permutaties die *left*, *right* en *top* bevatten. We zoeken dus $26! - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$. Aangezien elke letter (en dus ook de 't') maar één keer voorkomt, kunnen *left* en *right* niet samen voorkomen; maar *left* en *top* kunnen dat wel, gezien de permutatie deelstring *leftop* kan bevatten. Analoog kan ook de combinatie *right* en *top* als en slechts als de permutatie de deelstring *rightop* bevat. Samen geeft dat dus

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3|$$

dankzij het inclusie-exclusieprincipe.

Tellen we dus eerst het aantal permutaties dat *left* bevat. De letters 'e', 'f' en 't' liggen vast ten opzichte van de 'l' en voor de rest is alles vrij te kiezen, dus zijn er 23! dergelijke permutaties, dus $|A_1| = 23!$. Analoog geldt $|A_2| = 22!$ en $|A_3| = 24!$. Voor een permutatie in $A_1 \cap A_3$ liggen de letters 'e', 'f', 't', 'o', 'p' vast ten opzichte van de 'l', dus vinden we op dezelfde manier dat $|A_1 \cap A_3| = 21!$. Voor een permutatie in $A_2 \cap A_3$ hebben we analoog $|A_1 \cap A_3| = 20!$. Samen geeft dat dus $26! - 24! - 23! - 22! + 21! + 20!$ permutaties die aan de voorwaarden voldoen.

[1]Hierbij bevat een permutatie een woord als de letters van het woord elkaar rechtstreeks opvolgen, dus bijvoorbeeld 'abcwiskundeghfojlmpqrtvxyz' is een permutatie die wel 'wiskunde' bevat, maar niet 'info' bevat.

$\square$

Oefening 2. Een ingenieur stuurt boodschappen $c_1, c_2, \ldots$ over een kanaal en weet daarbij dat hij voor elke boodschap een kans $p > 0$ heeft dat ze niet juist aankomt (en dus kans $1-p$ heeft dat ze wel juist aankomt). Bepaal (in functie van p) de verwachtingswaarde van de positie[2] van de eerste fout en van de honderdste fout.

Oplossing. De formule uit de cursus zegt dat

$$E[X] = \sum_{x \in X(S)} x p_X(x),$$

met $X(S)$ de mogelijke uitkomstenruimte en $p_X(x)$ de kans dat $X = x$.

Voor het bepalen van de eerste fout is $X(S) = \{1, 2, \ldots\}$ gezien de eerste fout op alle mogelijke posities kan optreden. De kans dat de eerste fout op positie x optreedt, is $p(1-p)^i$, gezien dit betekent dat hier een fout optreedt en bij de vorige $i-1$ boodschappen geen fout optrad. De verwachtingswaarde wordt dus gegeven door

$$E[X] = \sum_{i=1}^{+\infty} ip(1-p)^{i-1} = p \sum_{i=1}^{+\infty} i(1-p)^{i-1} = p\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Voor het bepalen van de honderdste fout is $X(S) = \{100, 101, \ldots\}$ gezien de honderdste fout ten vroegste bij de honderdste positie kan optreden. De kans dat de honderdste fout op positie x optreedt, is p maal de kans dat er precies 99 fouten optraden in de vorige $x-1$ boodschappen, die $\binom{i-1}{99} p^{99}(1-p)^{i-1-99}$ is. De verwachtingswaarde is dus

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{i=100}^{+\infty} ip^{100}\binom{i-1}{99}(1-p)^{i-100} \\
&= p^{100}\sum_{i=100}^{+\infty} i\frac{(i-1)!}{99!(i-100)!}(1-p)^{i-100} \\
&= 100p^{100}\sum_{i=100}^{+\infty} \frac{i!}{100!(i-100)!}(1-p)^{i-100} \\
&= 100\frac{p^{100}}{(1-p)^{100}}\sum_{i=100}^{+\infty}\binom{i}{100}(1-p)^{i} \\
&= 100\frac{p^{100}}{(1-p)^{100}}\frac{(1-p)^{100}}{p^{101}} \\
&= \frac{100}{p}.
\end{aligned}$$

[2] Hierbij is de positie van de fout de plaats waarop hij optreedt, dus als bijvoorbeeld de eerste fout optreedt bij c_9, dan is de positie van die fout 9.

$\square$

Oefening 3. Bepaal de laatste drie cijfers van het getal $2011^{\left(2012^{2013}\right)}$.

Oplossing. De laatste drie cijfers is de rest van het getal modulo 1000. We zoeken dus eigenlijk $2011^{\left(2012^{2013}\right)} \mod 1000$. Aangezien $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ in priemfactoren, is

$$\phi(1000) = (2-1) \cdot 2^2 \cdot (5-1) \cdot 5^2 = 400.$$

We hebben dus dat

$$2011^{\left(2012^{2013}\right)} \equiv 2011^{\left(2012^{2013} \mod 400\right)} \pmod{1000},$$

we berekenen dus eerst $2012^{2013} \mod 400$.

Aangezien $(400+x)^n \equiv x^n \pmod{400}$ en $2000 = 5 \cdot 400$, zoeken we eigenlijk $12^{2013} \mod 400$, waarvoor we $\phi(400)$ willen kennen. Nu is $400 = 2^4 \cdot 5^2$ in priemfactoren, zodat

$$\phi(400) = (2-1) \cdot 2^3 \cdot (5-1) \cdot 5^1 = 160.$$

Nu is $2013 \equiv 93 \pmod{160}$ en dus $2012^{2013} \equiv 12^{93} \pmod{400}$; om de rest modulo 400 te kennen, bepalen we apart de rest modulo 25 en modulo 16, om zo het resultaat via de chinese reststelling te reconstrueren. Modulo 16 is dit duidelijk 0 (want 12^{93} bevat meer dan 4 factoren 2), modulo 25 kunnen we handig gebruik maken van $2^3 \cdot 3 = 24 \equiv -1 \pmod{25}$ en $3^3 = 27 \equiv 2 \pmod{25}$:

$$12^{93} = 2^{186}3^{93} = (24)^{62} \cdot 27^{10} \cdot 3 \equiv (-1)^{62} \cdot 2^{10} \cdot 3 \equiv 1 \cdot (24) \cdot 128 \equiv -1 \cdot 3 \pmod{25}.$$

Oplossen van

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{16} \\ x \equiv -3 \pmod{25} \end{cases}$$

met de Chinese reststelling geeft ons $x \equiv 272 \pmod{400}$, zodat $2012^{2013} \equiv 272 \pmod{400}$. Rest ons dus nog $2011^{272} \mod 1000$ te bepalen.

Aangezien $(1000+x)^n \equiv x^n \pmod{1000}$ voor alle natuurlijke getallen x, n, is dit gelijk aan $11^{272} \mod 1000$. Dit kunnen we heel vlug uitrekenen via het biomium van Newton:

$$11^{272} = (1+10)^{272} = \equiv 1^{272} + \binom{272}{1} \cdot 10^1 \cdot 1^{271} + \binom{272}{2} \cdot 10^2 \cdot 1^{270} \mod 1000,$$

gezien alle overige termen een factor 10^k met $k \geq 3$ hebben (en dus veelvouden van 1000 zijn). Bijgevolg is

$$11^{272} \equiv 1 + 272 \cdot 10 + \frac{272 \cdot 271}{2} \cdot 100 \equiv 1 + 720 + 600 \equiv 321 \pmod{1000},$$

zodat $2011^{\left(2012^{2013}\right)} \equiv 321 \pmod{1000}$. $\square$

Volgende som-formules kunnen misschien handig zijn. We beweren niet dat je ze nodig hebt en al zeker niet dat je ze allemaal nodig hebt, maar mocht je ze willen gebruiken dan mag je onderstaande stellingen zonder bewijs aannemen.

Zij $k, n \in \mathbb{N}$ en $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq 1$. Dan geldt

$$\sum_{i=k}^{n} a^i = \frac{a^{n+1} - a^k}{a - 1}.$$

Zij $k \in \mathbb{N}$ en $a \in \mathbb{R}$ met $0 \leq a < 1$. Dan geldt

$$\sum_{i=k}^{+\infty} a^i = \frac{a^k}{1 - a}.$$

Zij $k \in \mathbb{N}$ en $a \in \mathbb{R}$ met $0 \leq a < 1$. Dan geldt

$$\sum_{i=k}^{+\infty} \binom{i}{k} a^i = \frac{a^k}{(1 - a)^{k+1}}.$$

Zij $n \in \mathbb{N}$ en $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq 1$. Dan geldt

$$\sum_{i=1}^{n} i a^{i-1} = \frac{n a^{n+1} - (n+1) a^n + 1}{(1 - a)^2}.$$

Zij $n \in \mathbb{N}$ en $a \in \mathbb{R}$ met $0 \leq a < 1$. Dan geldt

$$\sum_{i=1}^{+\infty} i a^{i-1} = \frac{1}{(1 - a)^2}.$$

Zij $n \in \mathbb{N}$ en $p \in \mathbb{R}$, dan geldt

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i} = 1.$$

Zij $n \in \mathbb{N}$, dan geldt

$$\sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Zij $n \in \mathbb{N}$, dan geldt

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 \binom{n}{i} = (n(n-1)2^{n-2}) + (n \cdot 2^{n-1}).$$