1. **Stelling van de impliciete functies.** Zij X, Y, Z Banach-ruimten en f een continue functie $X \times Y \to Z$ die continu afleidbaar is naar de tweede veranderlijke in een omgeving in $X \times Y$ van $(a, b) \in X \times Y$.
Als $f(a, b) = 0$ en $D_2 f(a, b)$ een continue inverse $(D_2 f(a, b))^{-1}$ heeft, dan bestaat een omgeving $U \times V$ van (a, b) in $X \times Y$ zo dat voor iedere $x \in U$ een unieke $g(x) \in V$ bestaat waarvoor

$$f(x, g(x)) = 0.$$

Bovendien is de afbeelding $g \colon U \to Y$ continu.

Bewijs. D.m.v. een translatie mogen we aannemen dat $(a, b) = (0, 0)$. We trachten de contractie-stelling toe te passen op de afbeelding

$$F(x, y) := y - (D_2 f(0, 0))^{-1} \cdot f(x, y), \qquad \texttt{[1]}$$

tenminste voor voldoend kleine $(x, y) \in X \times Y$ [2]. Door de gegevens is F continu in een omgeving van $(0, 0)$. We gaan na of aan de gelijkmatige contractie-ongelijkheid voldaan is [3]. Omdat

$$D_2 F(x, y) \overset{\boxed{4}}{=} \mathrm{id} - (D_2 f(0, 0))^{-1} \circ D_2 f(x, y) \overset{\boxed{5}}{=} (D_2 f(0, 0))^{-1} \circ (D_2 f(0, 0) - D_2 f(x, y))$$

(hierbij is id de identieke afbeelding) is door de middelwaarde-ongelijkheid

$$\begin{aligned} \|F(x, y_2) - F(x, y_1)\| &\le \sup_{y \in [y_1, y_2]} \|D_2 F(x, y)\| \, \|y_2 - y_1\| \\ &\le \|(D_2 f(0, 0))^{-1}\| \sup_{y \in [y_1, y_2]} \|D_2 f(0, 0) - D_2 f(x, y)\| \, \|y_2 - y_1\| . \end{aligned}$$

Omdat $D_2 f$ continu is in $(0, 0)$, bestaat $\delta > 0$ zo dat $\|D_2 f(0, 0) - D_2 f(x, y)\| \le \frac{1}{2\|(D_2 f(0,0))^{-1}\|}$ zodra $\|x\| \le \delta$ en $\|y\| \le \delta$, zodat

$$\|F(x, y_2) - F(x, y_1)\| \le \tfrac{1}{2} \|y_2 - y_1\| , \text{ zodra } \|x\| \le \delta, \; \|y_1\| \le \delta, \; \|y_2\| \le \delta.$$

Om de contractie-stelling toe te kunnen passen, moeten we ook nog aantonen dat $F(x, y) \in \overline{B}_Y(0, \delta)$ als $y \in \overline{B}_Y(0, \delta)$, vermits de contractie-ongelijkheid enkel geldt voor $y \in \overline{B}_Y(0, \delta)$. Hiertoe merken we op dat voor $\|x\| \le \delta$ en $\|y\| \le \delta$,

$$\|F(x, y)\| \le \|F(x, y) - F(x, 0)\| + \|F(x, 0)\| \overset{\boxed{6}}{\le} \tfrac{1}{2} \|y\| + \|F(x, 0)\| .$$

Omdat $F(0, 0) = 0$ en F continu is in $(0, 0)$, bestaat $\delta' \le \delta$ [7] zo dat $\|F(x, 0)\| \le \delta/2$, zodra $\|x\| \le \delta'$, zodat $\|F(x, y)\| \le \delta$, zodra $\|x\| \le \delta'$ en $\|y\| \le \delta$. We kunnen dus de contractie-stelling [8] toepassen op de (gerestringeerde) afbeelding $F \colon \overline{B}_X(0, \delta') \times \overline{B}_Y(0, \delta) \to \overline{B}_Y(0, \delta)$, en vinden zo voor iedere $x \in \overline{B}_X(0, \delta')$ een unieke $g(x) \in \overline{B}_Y(0, \delta)$ waarvoor $F(x, g(x)) = g(x)$, d.w.z., waarvoor $f(x, g(x)) = 0$. Ook is $g \colon \overline{B}_X(0, \delta') \to \overline{B}_Y(0, \delta)$ continu. [9,10] $\square$

[1] Welke afbeelding is $.^{-1}$ (beschrijf domein en beeldverzameling)? Welke bewerking wordt uitgedrukt door $\cdot$?

[2] Waarom moet (x, y) klein gekozen worden?

[3] Wat betekent het dat de afbeelding F een gelijkmatige contractie is?

[4] Waarom komt er niet $D_2 F(x, y) = \mathrm{id} - (D_2 f(0, 0))^{-1} \cdot D_2 f(x, y)$?

[5] Is voor deze overgang de lineariteit van een van de optredende bewerkingen nodig?

[6] Verklaar.

[7] Waarom is $\delta' \le \delta$?

[8] Formuleer de versie van de contractie-stelling die hier toegepast wordt. Waarom wordt ze niet rechtstreeks toegepast op $F \colon X \times Y \to Y$?

[9] Hebben we de continuïteit van $D_2 f$ nodig gehad? Van $(D_2 f(a, b))^{-1}$? Zo ja, waar?

[10] Hebben we de compleetheid van X nodig gehad? Van Y? Van Z? Zo ja, waar?

2. Toon aan dat een eindig-dimensionale reële genormeerde ruimte isomorf is met $\mathbb{R}^n$. Je mag hierbij steunen op het feit dat X/Y een genormeerde ruimte is als X een genormeerde ruimte is en $Y \leq X$ gesloten is. Begin bijv. met de volgende eigenschap aan te tonen:
   Als X een genormeerde ruimte is, $x \in X \setminus \{0\}$ en de rij $(\lambda_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert (met $\lambda_n \in \mathbb{R}$), dan convergeert $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$.

3. (a) Toon aan dat compactheid een continue invariant is.
   (b) Toon aan dat de inverse van een injectieve continue afbeelding van een compacte metrische ruimte naar een metrische ruimte zelf continu is.
   (c) Volgt uit eigenschap (a) dat 'compleetheid' en 'totale begrensdheid' ook continue invarianten zijn?