Wetenschappelijk Rekenen

Examen - Derde bachelor informatica

Oefeningen – 31 mei 2011

1. De volgende functies zijn gegeven:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \qquad\qquad g(y) = \frac{y-1}{\log_e y}$$

Merk op dat de functie $g(y)$ dezelfde functie is als $f(x)$ waarbij we $y = e^x$ nemen. Merk op dat $f(x)$ onbepaald is voor $x = 0$ en dat de functie $g(y)$ onbepaald is voor $y = 1$. Wanneer we inzoomen op de eerste functie rond het punt $x = 0$ krijgen we veel ruis te zien. Zoomen we echter in op de tweede functie rond het punt $y = e^x = 1$, dan zien we veel minder ruis.

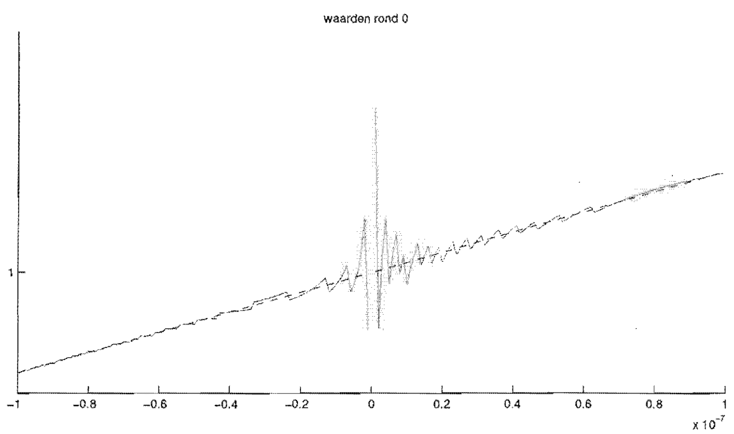
De code die we gebruiken om de functies nader te bekijken is

```
x=10.^(-7)*[-1:0.01:1];
dx = (exp(x)-1)./x;

y = exp(x);
dy = (y-1)./log(y);

figure;
hold on;
plot(x,dx,'-r');
plot(x,dy,'--b');
hold off;
```

De grafiek die je zodoende bekomt is



waarbij $f(x)$ met een volle lijn wordt geplot, de waardes $(x, g(y))$ met een gestreepte lijn. Verklaar waarom we bij de functie $f(x)$ zoveel ruis zien.

2. In de oefeningen hebben we de bestanden `Voorbeeld1.m` en `methodeEuler.m`, waarbij we de Euler-methode gebruiken om een stelsel van ODEs op te lossen, en de bestanden `Voorbeeld2.m` en `methodeAchterwaartseEuler.m`, waarbij we de Achterwaartse-Euler-methode gebruik, grondig bekeken.

   Maak een nieuw bestand `voorbeeld_vraag2.m` en `methodeTheta.m` aan (uiteraard gebaseerd op de hiervoor vermeldde bestanden!) waarin je ditmaal de algemene theta methode implementeert voor $\theta = \frac{2}{3}$. Deze methode is gedefinieerd als

   $$y_{n+1} - y_n \approx h\left[\theta f(t_{n+1}, y_{n+1}) + (1-\theta) f(t_n, y_n)\right] \qquad \theta \in [0,1]$$

   Denk goed na over wat je zoal moet aanpassen. Werkt deze methode beter of slechter voor het in `Voorbeeld1.m` en `Voorbeeld2.m` beschreven probleem? Hoe kan je dit zien? Kan je theoretisch verklaren waarom de ene methode beter is dan de andere?

3. Beschouw de warmtevergelijking (heat equation)

   $$u_t = u_{xx}, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad t >= 0,$$

   met de beginvoorwaarde

   $$u(0,x) = \cos(2\pi x), \qquad 0 \le x \le 1,$$

   en de Dirichlet randvoorwaarden

   $$u(t,0) = u(t,1) = e^{-4\pi^2 t}.$$

   Integreer dit van $t = 0$ tot en met $t = 0.1$. Geef de driedimensionale grafiek van de berekende oplossing. Bepaal ook de maximale fout in de berekende oplossing door dit te vergelijken met de exacte oplossing

   $$u(t,x) = \exp(-4\pi^2 t)\cos(2\pi x).$$

   Gebruik de roosterafstand $\triangle x \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right\}$ en plot de fout als een functie van $\triangle x$ op een log-log schaal.

4. Vul de lijst van Adams-Bashforth methodes aan met de 5-staps en 6-staps methode die volgt op de vier reeds gegeven methodes en geef de Maple commando's die je gebruikt hebt om deze lijst aan te vullen. We hebben:

   $$\begin{aligned}
   y_{n+1} - y_n &= h f_n \text{ (de Euler methode)} \\
   y_{n+1} - y_n &= \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}) \\
   y_{n+1} - y_n &= \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}) \\
   y_{n+1} - y_n &= \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})
   \end{aligned}$$

Schrijf uw oplossingen neer op papier. Plaats de bestanden die u eventueel gemaakt hebt om de vragen op te lossen op Minerva. Dit doet u door

- te surfen naar http://indianio/
- in te loggen met uw Minerva-username en -password
- uw bestanden te zippen tot 1 enkel bestand en up te loaden.

Zorg ervoor dat ik uit de naamgeving kan afleiden bij welke vraag elk bestand hoort.

Nog enkele tips :

- schrijf proper : het is de beste manier om te slijmen.
- probeer uw antwoorden bondig en correct te formuleren.
- heb je bij Maple en/of Matlab moeite met (de syntax van) bepaalde commando's, aarzel dan niet dit te vragen.