Examen algebra I

2e kandidatuur wiskunde
woensdag 9 februari 1994, 14u

Genom att försöka med det omöjliga, når man högsta graden av det möjliga
— August Strindberg

Oefening 1

Stel dat $K = \mathbf{F}_9(t)$, met t transcendent over $\mathbf{F}_9$, en dat

$$f(X) = X^4 - t \in K[X].$$

1. Bewijs dat f irreduciebel is over K.
2. Bewijs dat $X^2 + 1$ reduciebel is over K.
3. Stel dat α een wortel is van f in een algebraïsche afsluiting van K. Bewijs dat $L = K(\alpha)$ het splijtveld is van f.
4. Bepaal de Galoisgroep $G = Gal(L/K)$.
5. Geef alle deelgroepen van G en de corresponderende tussenvelden.
6. Geef voor elk tussenveld E van K en L het minimaalpolynoom van de uitbreiding L/E en E/K.

Oefening 2

Stel dat R een commutatieve ring is. Een ideaal I in R wordt *primair* genoemd als

$$ab \in I, a \notin I \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : b^m \in I.$$

Het *radikaal* van I is het ideaal

$$rad(I) = \{r \in R : \exists m \in \mathbb{N} : r^m \in I\}.$$

1. Bewijs dat het radikaal van een primair ideaal priem is.
2. Bewijs : Als I, J idealen zijn in R zodat

   (a) $I \subseteq J$
   (b) $b \in J \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : b^m \in I$
   (c) $ab \in I, a \notin I \Rightarrow b \in J$

   dan is I primair, en $J = rad(I)$.