Dit document bevat oefeningen horend bij het eerste hoofdstuk van de cursus "Discrete Wiskunde", 1e bachelor informatica, academiejaar 2006-2007. Deze oefeningen zijn gebaseerd op de oefeningen horend bij het eerste hoofdstuk van de cursus "Relaties en Structuren", academiejaar 2004-2005, en zijn opgesteld door Nele Haelvoet.

1 Verzamelingen en relaties

De basisnotaties

Oefening 1.1.
Beschouw $A = \{1, \{1\}, \{2\}\}$. Welke van de volgende beweringen zijn waar?

a. $1 \in A$

b. $\{1\} \in A$

c. $\{1\} \subset A$

d. $\{\{1\}\} \subset A$

e. $\{2\} \in A$

f. $\{2\} \subset A$

g. $\{\{2\}\} \subset A$

Oefening 1.2.
Beschouw nu $A = \{1, 2, \{2\}\}$. Welke van de beweringen uit oefening 1.1 zijn waar?

Oefening 1.3.
Welke van de volgende beweringen zijn waar?

a. $\emptyset \in \emptyset$

b. $\emptyset \subset \emptyset$

c. $\emptyset \in \{\emptyset\}$

d. $\emptyset \subset \{\emptyset\}$

Oefening 1.4. (III)
Beschouw volgende deelverzamelingen van $\mathbb{Z}$.

$A = \{2m + 1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$ $\quad$ $D = \{3r + 1 \mid r \in \mathbb{Z}\}$

$B = \{2n + 3 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ $\quad$ $E = \{3r + 2 \mid r \in \mathbb{Z}\}$

$C = \{2p - 3 \mid p \in \mathbb{Z}\}$ $\quad$ $F = \{3r - 2 \mid r \in \mathbb{Z}\}$

a. Welke van de volgende verzamelingen zijn gelijk aan elkaar: A, B en C?

b. Welke van de volgende verzamelingen zijn gelijk aan elkaar: D, E en F?

Oefening 1.5. (III)
Beschouw een universum Ω met $A, B \subset \Omega$. Stelling 1.1 kan aangevuld worden met volgende wetten en eigenschappen. Toon (5.) en (6.) aan. De andere wetten kunnen gebruikt worden in oefeningen en worden hier vermeld voor de nummering.

(5.) **Absorbtiewetten**
$A \cup (A \cap B) = A$
$A \cap (A \cup B) = A$

(6.) **Verschil van 2 verzamelingen**
$A \setminus B = A \cap B^c$

(7.) **Dubbel complement**
$(A^c)^c = A$

(8.) **Inversie wetten**
$A \cap A^c = \emptyset$
$A \cup A^c = \Omega$

(9.) **Idempotentie wetten**
$A \cup A = A$
$A \cap A = A$

(10.) **Identieteitswetten**
$A \cup \emptyset = A$
$A \cap \Omega = A$

(11.) **Dominantie wetten**
$A \cup \Omega = \Omega$
$A \cap \emptyset = \emptyset$

Oefening 1.6. (III)
Gebruik de wetten uit de vorige oefening om de volgende gelijkheden aan te tonen. Schrijf bij elke stap het nummer van de eigenschap die je gebruikt. Hierbij zijn $A, B, C \subset \Omega$, met Ω een universum.

a. $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$
b. $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$
c. $(A \setminus B)^c = A^c \cup B$
d. $\left(\left((A \cup B) \cap C\right)^c \cup B^c\right)^c = B \cap C$
e. $(A \triangle B) = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$
f. $(A \triangle B)^c = A \triangle B^c$

Relaties

Oefening 1.7.
Beschouw $A = \{1, 2, 3, 6\}$ en stel $B = \{1, 2, 3\}$. Los deze oefening op door van elke

gevraagde relatie een voorbeeld te geven (aan de hand van een pijlenvoorstelling) indien mogelijk of door aan te tonen waarom het niet mogelijk is.

a. Een surjectieve relatie van A naar B die geen injectieve relatie en geen surjectie is.
b. Een surjectieve functie van A naar B die geen injectieve relatie en geen surjectie is.
c. Een injectieve relatie van A naar B die geen injectie is.
d. Een surjectie van A naar B die geen injectie is.
e. Een surjectie van A naar B die ook een injectie is.
f. Een injectie van A naar B die geen surjectie is.
g. Een transformatie van A die geen permutatie is.
h. Een reflexieve relatie over A.
i. Een antireflexieve relatie over A.
j. Een niet-reflexieve relatie. (Merk op dat volgens de definitie van een niet-reflexieve relatie deze relatie ook niet anti-reflexief is.)
k. Een symmetrische relatie over A.
l. Een niet-symmetrische relatie over A.
m. Een antisymmetrische relatie over A.
n. Een transitieve relatie over A, die exact 4 koppels.
o. Een relatie over A die reflexief en symmetrisch is, maar niet transitief.
p. Een relatie over A die reflexief en transitief is, maar niet symmetrisch.
q. Een relatie over A die transitief en symmetrisch is, maar niet reflexief.
r. (III) Welke eigenschappen heeft volgende relatie in A: *is een deler van*?

Oefening 1.8.
Wat is fout bij volgende redenering?
Elke symmetrische en transitieve relatie $\Re$ over een verzameling A is reflexief.

> **Bewijs:** Beschouw $(x, y) \in \Re$. Aangezien de relatie symmetrisch is, is ook $(y, x) \in \Re$. Dus zijn zowel (x, y) als (y, x) koppels van de relatie. Transitiviteit heeft als gevolg dat $(x, x) \in \Re$. Dit toont aan dat de relatie ook reflexief is. $\square$

Oefening 1.9. (III)
Beschouw de relatie $\Re$ in $\mathbb{Z}$ waarvoor $a\Re b$ als en slechts als $a^2 = b^2$. Is deze relatie een equivalentierelatie in $\mathbb{Z}$? Zo ja, geef een unieke representatie voor elke equivalentieklasse.

Oefening 1.10. (III)
Beschouw een universum Ω en een willekeurige, maar vaste verzameling C. Beschouw volgende relatie $\Re$ in Ω: voor $A, B \in \Omega$ geldt dat $A\Re B$ als en slechts als $A \cap C = B \cap C$. Is deze relatie een orderelatie? Is deze relatie een equivalentierelatie? Zo ja, geef een unieke representant voor elke equivalentieklasse.

Oefening 1.11. (III)
Beschouw de verzameling van alle geordende tweetallen $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$. Defnieer volgende equivalentierelatie: (a, b) is equivalent aan $(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$. Toon aan dat dit inderdaad een equivalentierelatie definieert. Geef een unieke representant voor elke equivalentieklasse.

Oefening 1.12.
Beschouw de verzameling $A = \mathbb{N}[1, 7]$.

a. Toon aan dat $\{1, 2\} \cup \{3\} \cup \{4, 5, 7\} \cup \{6\}$ een partitie is van A.

b. Geef de bijhorende equivalentierelatie $\Re$ in A.