Examenvragen Discrete Wiskunde – Theorie

Voorafgaande opmerkingen

De hierna volgende vragen over de cursus Discrete Wiskunde zijn vragen die rechtstreeks terug te vinden zijn in de cursus. Ik wil er nogmaals aan herinneren dat van buiten leren van de antwoorden zonder deze te begrijpen, volledig zinloos is. Tijdens het examen zal gepeild worden of alles begrepen is en het is hierbij niet uitgesloten dat naar andere delen van de cursus wordt overgestapt.
Zoals uit de lijst van vragen mag volgen, zullen geen vragen gesteld worden uit hoofdstuk 1 en hoofdstuk 8. Het is echter aan te raden om hoofdstuk 1 grondig door te nemen, omdat daar heel wat terminologie wordt geïntroduceerd die in latere hoofdstukken aan bod komen. Wat hoofdstuk 8 betreft, moet wel voor het examen oefeningen kunnen gerekend worden met veeltermen over $\mathbb{Z}_p$.

1. Geef een definitie van het axioma van de goede ordening en leg uit dat als gevolg van dit axioma het inductieprincipe in $\mathbb{N}$ gebruikt mag worden.

2. Geef de definitie van een aftelbare verzameling. Bewijs dat de verzameling $\mathbb{Q}$ aftelbaar is en dat $\mathbb{R}$ niet aftelbaar is.

3. Geef de definitie van variaties met en zonder herhaling. Bewijs de formules voor het aantal variaties met en zonder herhaling.

4. Geef de definitie van combinaties met en zonder herhaling. Bewijs de formules voor het aantal combinaties met en zonder herhaling. Bewijs de formule van Stifel-Pascal voor de combinaties.

5. Geef de definitie van een wanorde van $\mathbb{N}[1, n]$. Bewijs dat het aantal wanordes d_n recursief kan gedefinieerd worden door $d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}),\ n > 2,\ d_1 = 0,\ d_2 = 1$.

6. Geef de definitie van de Stirling getallen $S(n, k)$ van de tweede soort. Bewijs dat deze getallen recursief kunnen gedefinieerd worden door $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k),\ (2 \leq k \leq n-1),\ S(n, 1) = S(n, n) = 1$.

7. Geef de definitie van een multinomiaalgetal. Bewijs de formule van een multinomiaalgetal in termen van permutaties. Bewijs de multinomiaalstelling.

8. Geef de definitie van een gewone voortbrengende functie van een rij $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Stel de voortbrengende functie van de rij van de combinaties met herhaling op.

9. Bewijs de formule voor het aantal partities van een natuurlijk getal.

10. Leg de matrixmethode uit voor homogene lineaire recurrente betrekkingen van de orde $n \geq 2$.

11. Stel de recurrente betrekking op die hoort bij het probleem van de torens van Hanoi.

12. Geef en bewijs het verband tussen een recursief gedefinieerde rij $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en zijn voortbrengende functie.

13. Stel de recurrente betrekkingen op die behoren bij de sorteeralgoritmes bubble-sort en merge-sort. Vergelijk hun complexiteit.

14. Bewijs dat er voor elke 2 getallen $a \in \mathbb{N}_0$ en $b \in \mathbb{Z}$ unieke gehele getallen q en $r \in \mathbb{N}[0, a-1]$ bestaan waarvoor $b = a \cdot q + r$. Bewijs dat elk natuurlijk getal op een unieke manier ontwikkeld kan worden in een willekeurig gekozen basis $t \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

15. Bewijs dat de verzameling van de priemgetallen een oneindige verzameling is. Bewijs dat elk getal $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ kan geschreven worden als een product van priemfactoren en dat dit op een unieke manier kan op de orde van de factoren na.

16. Bewijs het algoritme van Euclides voor het berekenen van de grootste gemene deler d van 2 gehele getallen a en b. Bewijs dat er steeds gehele getallen m en n kunnen gevonden worden zodanig dat $a \cdot m + b \cdot n = d$.

17. Bewijs dat indien een priemgetal p een product van gehele getallen deelt, het ten minste één van deze gehele getallen moet delen.

18. Geef de definitie van de Euler functie Φ en bewijs de formule voor $\Phi(n)$. Bewijs dat
$$\sum_{d|n} \Phi(d) = n.$$

19. Geef de definitie van de Möbius functie μ en bewijs de Möbius inversieformule.

20. Geef de definitie van inverteerbaar element in $\mathbb{Z}_m$ en bewijs de nodige en voldoende voorwaarde opdat een element in $\mathbb{Z}_m$ inverteerbaar zou zijn.

21. Bewijs de stelling van Euler: als $\text{ggd}(y, m) = 1$ dan geldt
$$y^{\Phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$
Bewijs hieruit de stelling van Fermat voor congruenties.

22. Bespreek en bewijs het aantal oplossingen van een lineaire congruentie $ax \equiv b \pmod{m}$.

23. Bewijs de stelling van Wilson: $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ voor een willekeurig priemgetal p.

24. Veronderstel dat p een oneven priemgetal is, bewijs dan dat er een $a \in \mathbb{Z}_p$ bestaat waarvoor $a^2 \equiv -1 \pmod{p}$ dan en slechts dan als $p \equiv 1 \pmod{4}$.

25. Formuleer en bewijs de Chinese reststelling. Leg het algoritme uit voor het oplossen van een stelsel van lineaire congruenties.

26. Veronderstel dat a en m 2 natuurlijke getallen zijn die onderling priem zijn. Veronderstel a de orde t bezit modulo m, bewijs de nodige en voldoende voorwaarde opdat a^k eveneens de orde t zou bezitten.

27. Bespreek het aantal oplossingen van een kwadratische congruentie $x^2 \equiv a \pmod{p}$, met p een oneven priemgetal. Bewijs het criterium van Euler voor de kwadratische congruenties.

28. Formuleer en bewijs de stelling van Lagrange voor de orde van een deelgroep van een eindige groep.

29. Geef de definitie van een cyclische groep en bewijs dat elke twee cyclische groepen van dezelfde orde isomorf zijn.

30. Geef een definitie van even en oneven permutatie. Bewijs dat deze definitie onafhankelijk is van de ontbinding in transposities.

31. Geef de definitie van een Eulergraaf. Bewijs de nodige en voldoende voorwaarde opdat een graaf Euleriaans zou zijn. Leg het algoritme van Fleury uit en bewijs de correctheid hiervan.

32. Geef de definitie van een Hamiltoniaanse graaf. Bewijs de stelling van Dirac opdat een graaf Hamiltoniaans zou zijn.

33. Leg het verschil uit tussen de DFS- en BFS-zoekmethode in grafen.

34. Geef en bewijs de uitwisselingsstelling voor opspannende bomen in een graaf.

35. Leg het algoritme van Kruskal uit voor het verbindingenprobleem in een gewogen graaf en bewijs de correctheid van dit algoritme. Bespreek eveneens de cykeltest en het algoritme van Prim.

36. Leg het algoritme van Dijkstra uit voor het bepalen van de kortste gewogen afstand tussen twee toppen in een graaf.

37. Bespreek het algoritme voor het construeren van een maximumkoppeling in een graaf door middel van vergrotende wisselpaden. Bewijs de correctheid van het algoritme (stelling van Petersen – Berge).