Examen THEORETISCHE MECHANICA I - 19/06/2017 - 8:30

Eerste examenperiode

Theorie

T1. Beschouw een deeltje P met massa m dat onderworpen is aan een gravitationele aantrekkingskracht $\mathbf{F} = (-k/r^2)\mathbf{e}_r$ vanuit een krachtcentrum O waar zich een massa M bevindt. (Hierbij is $k = GMm$, met G de universele gravitatieconstante, en $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$, met $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$).

(i) Bewijs dat $\mathbf{F}$ conservatief is en bereken de potentiële energie. Toon vervolgens aan dat de totale (mechanische) energie, het impulsmoment $\mathbf{L}_O$ om O en de Laplace-Runge-Lenz vector

$$\mathbf{R} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}_O - \frac{k}{r}\mathbf{r}$$

behouden grootheden voorstellen.

(ii) Bewijs dat als $\mathbf{L}_O \neq \mathbf{0}$, de beweging in een vlak geschiedt en dat $\mathbf{R}$ in het baanvlak gelegen is.

(iii) Toon aan dat de voerstraal $\mathbf{r}$ in gelijke tijden gelijke oppervlakken bestrijkt (wet der perken).

(iv) Onderstel dat de baan een ellips is. Toon dan aan dat de beweging van het deeltje periodiek is en geef een rechtstreeks verband tussen de oppervlakte van de ellips en de periode van de beweging.

T2. Beschouw een stelsel van N massapunten die onderworpen zijn aan uitwendige en inwendige krachten.

(i) Geef de definitie van het massamiddelpunt C van het stelsel en bewijs dat deze niet afhangt van de keuze van de oorsprong van het referentiestelsel.

(ii) Stel het verband op tussen het totaal impulsmoment $\mathbf{L}_O$ van het stelsel om de oorsprong O en het totaal impulsmoment $\mathbf{L}_C$ om C. Steunend op het feit dat de tijdsafgeleide van $\mathbf{L}_O$ gelijk is aan het totaal moment van de uitwendige krachten om O, toon aan dat de afgeleide naar de tijd van $\mathbf{L}_C$ eveneens gelijk is aan het totaal moment van de uitwendige krachten om C.

(iii) Toon aan dat de kinetische energie van het stelsel te schrijven is als de som van de kinetsiche energie van het massamiddelpunt waarin de totale massa van het stelsel is geconcentreerd, en de kinetische energie T_C van de relatieve beweging van het stelsel ten opzichte van het massamiddelpunt. Bewijs vervolgens dat de afgeleide naar de tijd van T_C gelijk is aan het totaal vermogen van de uitwendige en inwendige krachten berekend ten opzichte van C.

OPM. 1) Vergeet niet op ELK blad duidelijk uw naam te schrijven.
2) Theorie en oefeningen op APARTE BLADEN (en apart afgeven)!

Oefeningen

O1. Een deeltje P met massa m, onderworpen aan de zwaartekracht, glijdt zonder wrijving langs een gladde parabool in een vast verticaal vlak. De parabool heeft als vergelijking $y = x^2/4a$ (met a een constante) t.o.v. een assenstelsel met horizontale x-as en y-as verticaal naar boven georiënteerd. Noem Ψ de hoek die de raaklijn aan de parabool in P insluit met de positieve x-as (gemeten vanaf de x-as).

(i) Indien het deeltje vanuit het laagste punt van de parabool vertrekt met een beginsnelheid v_0, rakend aan de parabool, toon dan aan dat de grootte van de reactiekracht van de parabool in elk punt evenredig is met $\cos^3\Psi$, met een constante evenredigheidsfactor.

(ii) Wat wordt, bij dezelfde beginvoorwaarden, de grootte van de reactiekracht in het geval dat het vlak van de parabool een hoek $(0 \leq)\, \alpha < \pi/2$ insluit met het horizontaal vlak (of, anders gezegd, de x-as nog steeds horizontaal is maar de y-as een hoek $\frac{\pi}{2} - \alpha$ insluit met de opwaartse verticale)?

(Aanwijzing: Indien nodig kan gebruik gemaakt worden van de formule, in cartesische coördinaten, voor de kromtestraal van een vlakke kromme $y = y(x)$:
$\rho = |\frac{\{1 + (dy/dx)^2\}^{3/2}}{d^2y/dx^2}|$.)

O2. Een deeltje P met massa m, onderworpen aan de zwaartekracht, kan zonder wrijving glijden langsheen een dunne staaf AB met lengte $2a$. Deze staaf glijdt zelf met zijn eindpunten A en B over een gladde cirkel met straal $R\ (> a)$, gelegen in een vast verticaal vlak. Neem nu aan dat de staaf met constante hoeksnelheid ω wentelt om een horizontale as door het middelpunt O van de cirkel, loodrecht op dit verticaal vlak.

(i) Kies de afstand van het midden C van de staaf tot het massapunt als veralgemeende coördinaat ($q = |CP|$) en stel de Lagrangiaan en de Lagrangevergelijking op voor het deeltje.

(ii) Onderstel dat het deeltje op $t = 0$ zich in relatieve rust bevindt (t.o.v. de staaf) in het midden C, en dat de staaf op $t = 0$ zich in horizontale stand bevindt met C onder O, bepaal dan de oplossing $q(t)$ van de Lagrangevergelijking.