Topologie en metrische ruimten

1. Toon aan: een padsamenhangende topologische ruimte X is samenhangend.
2. Toon aan dat elke n-dimensionale genormeerde ruimte ($n \in \mathbb{N}$) isomorf is met $\mathbb{K}^n$.
3. Beantwoord de vragen:

Lemma 1. *Zij $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij van rechthoeken in $\mathbb{R}^d$. Dan bestaat een rij $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ van onderling disjuncte rechthoeken zo dat voor elke $m \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{n\leq m} I_n = \bigsqcup_{n\leq k_m} J_n$ (voor zekere k_m).*

Stelling 2. *Zij $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Dan is*

$$\overline{\mu}(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} v(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n,\ I_n \subseteq \mathbb{R}^d \text{ rechthoeken}\right\}.$$

Bewijs. $\leq$: als $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, dan is $1_A \leq \sum_{n=1}^{\infty} 1_{I_n}$, zodat $\overline{\mu}(A) = \overline{\int} 1_A \overset{[1]}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \int 1_{I_n} = \sum_{n=1}^{\infty} v(I_n)$.

$\geq$: zij willekeurig $f_n \in \mathcal{T}$, $f_n \geq 0$ met $1_A \leq \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Noem $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$ en kies $\varepsilon \in]0,1[$ willekeurig. Noem voor elke $n \in \mathbb{N}$

$$E_n := \{x \in \mathbb{R}^d : s_n(x) \geq 1 - \varepsilon\}.$$

Als nu $x \in A$, dan bestaat $n \in \mathbb{N}$ waarvoor $s_n(x) \geq 1 - \varepsilon$[2]. Er volgt dat $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Verder is $(E_n)_n$ een stijgende rij. Elke E_n is een eindige unie van rechthoeken[3]. Maak hieruit een rij $(I_n)_n$ van disjuncte rechthoeken met $E_m = \bigsqcup_{n\leq k_m} I_n$ voor elke $m \in \mathbb{N}$ (zekere k_m) zoals in lemma 1. Dan is voor elke m

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \overset{[4]}{\geq} \int s_m \overset{[5]}{\geq} \int (1-\varepsilon) 1_{E_m} = (1-\varepsilon)\mu(E_m) = (1-\varepsilon)\sum_{n=1}^{k_m} v(I_n).$$

Omdat $m \in \mathbb{N}$ willekeurig is, is dus $\sum_{n=1}^{\infty} v(I_n) \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\int f_n$. Daardoor is het rechterlid uit de opgave ten hoogste $\frac{1}{1-\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\int f_n$[6]. Er volgt dat het rechterlid ten hoogste $\overline{\int} 1_E = \overline{\mu}(E)$ is[7]. □

[1-7]: verklaar.

Topologie en metrische ruimten

1. (a) Definieer de producttopologie op $X_1 \times X_2$ (X_1, X_2 topologische ruimten). Toon aan dat deze definitie een topologie definieert op $X_1 \times X_2$.

   (b) Definieer de producttopologie op $\prod_{i \in I} X_i$ (X_i topologische ruimten). Toon aan dat deze definitie een topologie definieert op $\prod_{i \in I} X_i$ en dat ze samenvalt met de definitie uit deel (a) in het geval $I = \{1, 2\}$.

2. Zij f, g meetbare afbeeldingen $E \to \mathbb{R}$. Toon aan dat $\int_E |f - g| = 0$ als en slechts als f en g samenvallen behalve in de punten van een nulverzameling.

3. Beantwoord de vragen:

   Stelling 1. *Zij (M, d) een metrische ruimte. Dan kunnen we M als metrische ruimte identificeren met een deelverzameling van de complete metrische ruimte $(C_b(M, \mathbb{R}), d_\infty)$.*

   Bewijs. Zij $x_0 \in M$ vast. Voor $x \in M$ definiëren we $\iota_x \in C_b(M, \mathbb{R})$ [1] als volgt:

   $$\iota_x(y) := d(x, y) - d(x_0, y).$$

   We kunnen M identificeren met $\{\iota_x : x \in M\} \subseteq C_b(M, \mathbb{R})$ omdat $d(x, y) = d_\infty(\iota_x, \iota_y)$ voor elke $x, y \in M$. Er geldt namelijk:

   $$d_\infty(\iota_x, \iota_y) = \sup_{z \in M} |\iota_x(z) - \iota_y(z)| = \sup_{z \in M} |d(x, z) - d(y, z)|,$$

   wat gelijk is aan $d(x, y)$, omdat ... [2] $\square$

   Lemma 2. *Zij (M, d), (M', d') metrische ruimten en $V \subseteq M$ dicht in M. Zij f een continue afbeelding $M \to M'$. Als $f_{|V}$ de afstand bewaart, dan bewaart ook f de afstand.*

   Bewijs. Voor $x = \lim_n x_n \in M$, $y = \lim_n y_n \in M$ (met $x_n, y_n \in V$) is

   $$d'(f(x), f(y)) = d'(\lim_n f(x_n), \lim_n f(y_n)) \overset{[3]}{=} \lim_n d'(f(x_n), f(y_n)) = \lim_n d(x_n, y_n) = d(x, y).$$

   $\square$

   [1]: leg uit waarom $\iota_x \in C_b(M, \mathbb{R})$.
   [2]: leg uit waarom $d_\infty(\iota_x, \iota_y) = d(x, y)$.
   [3]: verklaar de gelijkheid.

4. Beantwoord de vragen:

   Stelling 3. *Zij $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ en (f_n) een rij van meetbare afbeeldingen met $f_n \geq 0$ en $f_n \nearrow f$. Dan is $\int f_n \to \int f$.*

   Bewijs. f is meetbaar, omdat ... [1]
   Als $f \in \mathcal{L}^1$, dan volgt het resultaat door ... [2]
   Als $f \notin \mathcal{L}^1$, dan is $\int f = +\infty$ [3]. Verder is de rij $\left(\int f_{\square_n}\right)_n$ onbegrensd: zoniet volgt uit $f_{\square_n} \nearrow f$ en monotone convergentie (versie 1) dat $f \in \mathcal{L}^1$.
   Kies nu $R \geq 0$ vast. Dan is $\int (f_n)_{\square_R} \to \int f_{\square_R}$ [4]. Omdat $\int f_n \geq \int (f_n)_{\square_R}$, wordt $\int f_n$ willekeurig groot voor voldoend grote n [5], m.a.w. $\int f_n \to +\infty$. $\square$

   [1,2]: vul aan.
   [3-5]: verklaar het onderlijnde.

Topologie en metrische ruimten

1. Toon aan dat samenhang en compactheid continue invarianten zijn.
2. Toon aan:

   Stelling 1. *Zij $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ open, $E \subseteq \mathbb{R}^d$ meetbaar en $f\colon E \times \Omega \to \mathbb{R}$ een afbeelding met volgende eigenschappen:*

   (a) $f(\cdot,\lambda)$ is integreerbaar op E, voor elke $\lambda \in \Omega$
   (b) $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda) \in \mathbb{R}$ bestaat voor elke $x \in E$ en elke $\lambda \in \Omega$
   (c) er bestaat een $g \in \mathcal{L}^1(E)$ met $|\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\cdot,\lambda)| \leq g$ voor elke $\lambda \in \Omega$.

   Dan is voor elke $\lambda \in \Omega$
   $$\frac{d}{d\lambda}\int_E f(\cdot,\lambda) = \int_E \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\cdot,\lambda).$$

3. Beantwoord de vragen:

   Stelling 2. *Als $V \neq \varnothing$ een verzameling is en X een topologische vectorruimte, dan is ook X^V met de product-topologie*[1] *een topologische vectorruimte.*

   Bewijs. We gaan na dat de afbeelding $(f,g) \mapsto f+g$ continu is met het nettenkenmerk. Zij dus $f_\lambda \to f$ en $g_\lambda \to g$ voor de product-topologie, d.w.z. $f_\lambda(x) \to f(x)$ en $g_\lambda(x) \to g(x)$ in X voor elke $x \in V$. Dan is $f_\lambda(x) + g_\lambda(x) \to f(x) + g(x)$ voor elke $x \in V$[2].
   Analoog voor het scalair product. □

   [1] Definieer de product-topologie op X^V.
   [2] Verklaar.

4. Beantwoord de vragen:

   Lemma 3. *Als $f \in \mathcal{C}_c$, $f \geq 0$, dan valt $\overline{\int} f$ samen met de Riemann-integraal $\int f$.*

   Bewijs. $\overline{\int} f \leq \int f$: kies $f_1 := f$, $f_2 = f_3 = \cdots = 0$ in de definitie van $\overline{\int}$.

   $\int f \leq \overline{\int} f$: kies een rij $(f_n)_n$ met $f_n \in \mathcal{C}_c$, $f_n \geq 0$ en $f \leq \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. De rij van de partieelsommen $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k \in \mathcal{C}_c$ is stijgend. Dan is de rij van de functies $g_n := \min\{f, s_n\} \in \mathcal{C}_c$ ook stijgend, en bovendien (puntsgewijs) convergent naar f. Verder is $g_n(x) = 0$ zodra $\|x\| \geq R$ (zekere R)[1]. Dan is $g_n \to f$ gelijkmatig op $\overline{B}(0,R)$[2]. Daardoor is $\int g_n \to \int f$. I.h.b. is voor elke $\varepsilon > 0$
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \overset{[3]}{\geq} \int g_n \geq \int f - \varepsilon, \quad \text{zodra } n \text{ voldoende groot.}[4]$$
   □

   Stelling 4. *Als $f \in \mathcal{R}$, $f \geq 0$, dan valt $\overline{\int} f$ samen met de Riemann-integraal $\int f$.*

   Bewijs. $\overline{\int} f \leq \int f$: kies $f_1 := f$, $f_2 = f_3 = \cdots = 0$ in de definitie van $\overline{\int}$.
   $\int f \leq \overline{\int} f$: kies $\varepsilon > 0$. Er bestaat een Riemann-partitie π van f met $\int f - \varepsilon \leq s_\pi \leq \int f$. Dan is $s_\pi = \int t$ voor zekere trapfunctie t met $0 \leq t \leq f$[5], en kunnen we t benaderen d.m.v. $g \in \mathcal{C}_c$ met $0 \leq g \leq t$ en $\int g \geq \int t - \varepsilon$, zodat
   $$\overline{\int} f \geq \overline{\int} g \overset{[6]}{=} \int g \geq \int f - 2\varepsilon.$$
   Omdat $\varepsilon > 0$ willekeurig is, volgt het gevraagde. □

   [1]: hangt R hier af van n? Verklaar.
   [2,3,5,6]: verklaar.
   [4]: hoe volgt het gevraagde hieruit?

Topologie en metrische ruimten

1. Zij $(V_i)_{i\in I}$ een familie van samenhangende deelverzamelingen van een topologische ruimte X. Als voor elke $i, j \in I$ geldt dat $V_i \cap V_j \neq \varnothing$, toon dan aan dat ook $\bigcup_{i\in I} V_i$ samenhangend is.

2. Toon aan:

   Stelling 1. *Zij $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ open, $E \subseteq \mathbb{R}^d$ meetbaar en $f\colon E \times \Omega \to \mathbb{R}$ een afbeelding met volgende eigenschappen:*

   (a) $f(\cdot, \lambda)$ is integreerbaar op E, voor elke $\lambda \in \Omega$

   (b) $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) \in \mathbb{R}$ bestaat voor elke $x \in E$ en elke $\lambda \in \Omega$

   (c) er bestaat een $g \in \mathcal{L}^1(E)$ met $\left|\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\cdot, \lambda)\right| \leq g$ voor elke $\lambda \in \Omega$.

   Dan is voor elke $\lambda \in \Omega$
   $$\frac{d}{d\lambda}\int_E f(\cdot, \lambda) = \int_E \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\cdot, \lambda).$$

3. Beantwoord de vragen:

   Lemma 2. *Zij M, M' metrische ruimten en zij $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}_b(M, M')$ totaal begrensd voor de metriek d_∞. Dan is $\mathcal{F}$ equicontinu.*

   Stelling 3. *Zij K een compacte topologische ruimte en M een complete metrische ruimte. Dan zijn equivalent voor $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(K, M)$:*

   1. $\mathcal{F}$ is compact (voor de metriek d_∞)

   2. $\mathcal{F}$ is equicontinu, $\mathcal{F}$ is gesloten onder gelijkmatige convergentie en $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ is totaal begrensd voor elke $x \in K$.

   Bewijs. (1) $\Rightarrow$ (2): omdat $\mathcal{F}$ totaal begrensd is, is $\mathcal{F}$ equicontinu wegens lemma 2. Omdat $\mathcal{F}$ gesloten is in $(\mathcal{C}(K,M), d_\infty)$, is $\underline{\mathcal{F}\text{ gesloten onder gelijkmatige convergentie}}$[1].
   Kies nu willekeurig $x \in K$. Als $f_n \overset{d_\infty}{\rightrightarrows} f$, dan is i.h.b. $f_n(x) \to f(x)$. Daardoor is de evaluatie-afbeelding $\underline{\delta_x\colon \mathcal{C}(K,M) \to M\colon \delta_x(f) := f(x)\text{ continu is}}$[2]. Daardoor $\underline{\text{is } \delta_x(\mathcal{F}) = \{f(x) : f \in \mathcal{F}\}\text{ totaal begrensd}}$[3].
   (2) $\Rightarrow$ (1): omdat $\mathcal{C}(K,M) = \mathcal{C}_b(K,M)$ compleet is en $\mathcal{F}$ gesloten is in $(\mathcal{C}(K,M), d_\infty)$, is dus ook $\mathcal{F}$ compleet. Zij nu $U \subseteq \mathcal{F}$ oneindig en $\varepsilon > 0$. Wegens een karakterisering van totale begrensdheid volstaat het aan te tonen dat $f, g \in U$ $(f \neq g)$ bestaan met $d_\infty(f,g) \leq \varepsilon$.
   Veronderstel eerst dat $K = \{x_1, \ldots, x_N\}$ eindig is. Omdat $\{f(x_1) : f \in U\}$ totaal begrensd is, $\underline{\text{bestaat een oneindige } U_1 \subseteq U \text{ zo dat } \operatorname{diam}(\{f(x_1) : f \in U_1\}) \leq \varepsilon}$[4]. Analoog vinden we een oneindige $U_2 \subseteq U_1$ zo dat $\operatorname{diam}(\{f(x_2) : f \in U_2\}) \leq \varepsilon$, enz. Kiezen we $f, g \in U_N$ $(f \neq g)$, dan is $\underline{d(f(x), g(x)) \leq \varepsilon \text{ voor elke } x \in K}$[5].[6]
   Zij nu K een willekeurige compacte metrische ruimte. $\underline{\text{Elke } x \in K \text{ heeft een omgeving } V_x \text{ zo dat } d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon, \text{ voor elke } f \in U \text{ en } y \in V_x}$[7]. $\underline{\text{Dan is } K \subseteq V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_N} \text{ voor zekere } x_1, \ldots, x_N \in K}$[8]. Wegens het reeds behandelde geval vinden we $f, g \in U$ $(f \neq g)$ met $d(f(x_j), g(x_j)) \leq \varepsilon$ voor elke $j \in \{1, \ldots, N\}$. Dan is voor elke $x \in K$
   $$d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), f(x_k)) + d(f(x_k), g(x_k)) + d(g(x_k), g(x)) \leq 3\varepsilon$$
   (voor zekere $k \in \{1, \ldots, N\}$). $\square$

   [1-5,7-8]: verklaar het onderlijnde.
   [6]: hoe volgt er dat $d_\infty(f,g) \leq \varepsilon$?

Oefeningen *Topologie en Metrische ruimten*

13 Juni 2017

1. Verklaar uitvoerig waarom de aangeduide stappen in de volgende redenering (niet) juist zijn:

   Stelling (Baire). *Zij M een complete metrische ruimte en U_n een aftelbare verzameling van open dichte deelverzamelingen. Dan is ook $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ dicht in M.*

   Bewijs. Het volstaat om aan te tonen dat voor elke open verzameling $W \neq \emptyset$ in M er een punt x bestaat zodat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt $x \in W \cap U_n$ **[1]**. Aangezien U_1 dicht is in M, bestaat er een punt x_1 en een $0 < r_1 < 1$ zodanig dat

   $$\overline{B}(x_1, r_1) \subset W \cap U_1. \qquad \textbf{[2]}$$

   Aangezien nu elke U_n dicht is, vinden we dan recursief punten x_n en getallen $0 < r_n < 1/n$ zodanig dat

   $$\overline{B}(x_n, r_n) \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap U_n.$$

   Dan is $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een Cauchy-rij **[3]**, en convergeert bijgevolg naar een limiet x, die in de doorsnede van W en elke U_n ligt **[4]**. □

   Stelling. *Zij X een Banachruimte en Y een genormeerde ruimte. Beschouw een familie $\mathcal{A}$ van continue lineaire afbeeldingen $X \to Y$, waarvoor $\sup_{A\in\mathcal{A}} \|A(x)\| < \infty$ voor elke $x \in X$. Dan geldt ook*

   $$\sup_{A\in\mathcal{A}} \|A\| < \infty.$$

   Bewijs. Voor elke $n \in \mathbb{N}$ definiëren we de verzameling $U_n := \{x \in X : \sup_{A\in\mathcal{A}} \|A(x)\| \leq n\}$. Dan is elke U_n gesloten **[5]** en $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = X$ **[6]**. Hierdoor volgt uit de stelling van Baire dat er een $m \in \mathbb{N}$ bestaat zodat $\mathring{U}_m \neq \emptyset$ **[7]**, i.e. er is een punt $x_0 \in X$ en een $\epsilon > 0$ zodat

   $$B(x_0, \epsilon) \subset U_m.$$

Neem $u \in X$ zo dat $\|u\| \leq 1$ en $A \in \mathcal{A}$, dan zal:

$$\begin{aligned}\|A(u)\| &\leq \epsilon^{-1} \|A(x_0 + \epsilon u) - A(x_0)\| \\ &\leq \epsilon^{-1} (\|A(x_0 + \epsilon u)\| + \|A(x_0)\|) \\ &\leq 2\epsilon^{-1} m. \qquad \textbf{[8]}\end{aligned}$$

[9] $\square$

[1-6]: Verklaar.
[7]: Hoe volgt dit uit de stelling van Baire?
[8]: Leg alle stappen uit de ongelijkheid uit.
[9]: Hoe volgt het gestelde hier uit?

2. Toon aan dat voor een continue idempotente afbeelding $f : X \to X$ (i.e. $f \circ f = f$) over een Hausdorff eerste aftelbaarheidsruimte X geldt dat $f(X)$ gesloten is in X.

3. Zij X een niet-ledige, compacte Hausdorff ruimte en $f : X \to X$ een continue afbeelding. We definiëren recursief $X_0 := X$ en $X_{n+1} := f(X_n)$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ en beschouwen $A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Toon aan dat A niet-ledig is en dat $f(A) = A$.

4. Geef een voorbeeld van een Hausdorff topologische ruimte X die niet lokaal compact is en motiveer.

5. Zij E een topologische vectorruimte met dim $E \geq 2$ en $f : E \to \mathbb{R}$ een continue afbeelding. Toon aan dat er steeds een punt $x \in E$, $x \neq 0$, bestaat zodanig dat $f(x) = f(-x)$.

Het eerste examen is het theorieexamen van de ochtend van woensdag 14 juni, het tweede het theorieexamen van de namiddag van maandag 12 juni, het derde het theorieexamen van donderdag 8 juni, het vierde het theorieexamen van de namiddag van woensdag 14 juni. De laatste is het oefeningenexamen van dinsdag 13 juni.

Met dank aan Vindanda Pype, Steven Van Overberghe en Julie Awouters, samengesteld door Nathan Steyaert.