Oefeningen *Topologie en metrische ruimten*

1. Leg uit waarom de aangeduide stappen in de volgende redenering (niet) juist zijn:

   Stelling. *Een compacte metrische ruimte M is niet isometrisch met een strikte deelruimte van M.*

   Bewijs. Zij $V \subsetneq M$ en $f\colon M \to V$ een isometrie. Kies $x \in M \setminus V$.
   Dan bestaat $\varepsilon > 0$ zo dat $B(x, \varepsilon) \subseteq M \setminus V$.`[1]`
   Er bestaat een kleinste $n \in \mathbb{N}$ met de eigenschap dat $M = \bigcup_{j=1}^{n} U_j$ voor zekere $U_j \subseteq M$ met $\operatorname{diam}(U_j) < \varepsilon$.`[2]`
   Dan is $V = \bigcup_{j=1}^{n-1} V_j$ voor zekere $V_j \subseteq V$ met $\operatorname{diam}(V_j) < \varepsilon$.`[3]`
   Dan is $M = \bigcup_{j=1}^{n-1} W_j$ voor zekere $W_j \subseteq M$ met $\operatorname{diam}(W_j) < \varepsilon$`[4]`.`[5]` $\square$

   `[1,2,3,4]` Verklaar.

   `[5]` Hoe volgt het gevraagde hieruit? (Verklaar de structuur van het bewijs.)

   [1] Omdat M compact is, en $f\colon M \to V$ een isometrie (i.h.b. continu) is, is ook $V = f(M)$ compact, en dus gesloten in de metrische ruimte M. Daardoor $M \setminus V$ open, en is x dus een inwendig punt van $M \setminus V$.

   [2] Omdat M compact is, is M totaal begrensd, zodat een $n \in \mathbb{N}$ bestaat met de gegeven eigenschap. Omdat elke niet-lege verzameling van natuurlijke getallen een kleinste element heeft, bestaat dus ook een kleinste $n \in \mathbb{N}$ met die eigenschap.

   [3] Omdat $x \in M$, is $x \in U_j$ voor zekere j, z.v.v.a. voor $j = n$. Als $y \in U_n$, dan is $d(x, y) \leq \operatorname{diam}(U_n) < \varepsilon$, zodat $y \in B(x, \varepsilon) \subseteq M \setminus V$. Omdat $y \in U_n$ willekeurig is, is dus $U_n \cap V = \varnothing$. Noem $V_j := U_j \cap V$. Dan is $V = \bigcup_{j=1}^{n} V_j = \bigcup_{j=1}^{n-1} V_j$, en is $\operatorname{diam}(V_j) \leq \operatorname{diam}(U_j) < \varepsilon$, $\forall j$.

   [4] $M = f^{-1}(V) = \bigcup_{j=1}^{n-1} f^{-1}(V_j)$. Omdat f afstandbehoudend is, is

   $$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \operatorname{diam}(V_j)$$

   voor elke $x, y \in W_j := f^{-1}(V_j)$, zodat ook $\operatorname{diam}(W_j) \leq \operatorname{diam}(V_j) < \varepsilon$.

   [5] We veronderstelden uit het ongerijmde dat f isometrisch was met de strikte deelruimte V van M, maar vinden een strijdigheid omdat M niet door $n-1$ verzamelingen met diameter $< \varepsilon$ kan bedekt worden.

2. Geef een voorbeeld van een compacte topologische ruimte X die homeomorf is met een strikte deelruimte van X.

   Zij $f\colon [0, 1/2] \to [0, 1]\colon f(t) = 2t$ (met de gewone topologie uit $\mathbb{R}$). Dan is $f^{-1}\colon [0, 1] \to [0, 1/2]\colon f(t) = t/2$, met f, f^{-1} continu, zodat f een homeomorfisme is, en dus $[0, 1]$ homeomorf is met $[0, 1/2] \subsetneq [0, 1]$.

3. Zij X, Y topologische ruimten en f een continue surjectieve afbeelding $X \to Y$. Definieer

   $$x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

   en zij $\pi\colon X \to X/_\sim$ de canonische surjectie.

   (a) Toon aan dat de afbeelding $\widetilde{f}\colon X/_\sim \to Y\colon \widetilde{f}(\pi(x)) := f(x)$ goed gedefinieerd, continu en bijectief is.

   (a) Omdat

   $$\pi(x_1) = \pi(x_2) \iff x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2) \iff \widetilde{f}(\pi(x_1)) = \widetilde{f}(\pi(x_2))$$

   is f gedefinieerd onafhankelijk van de representant van $\pi(x)$ (wegens '$\Rightarrow$' in de vorige equivalenties), en is f injectief (wegens '$\Leftarrow$' in de vorige equivalenties). Omdat f surjectief is, bestaat voor elke $y \in Y$ een $x \in X$ met $f(x) = \widetilde{f}(\pi(x)) = y$, zodat ook $\widetilde{f}$ surjectief is.
   We tonen aan dat $\widetilde{f}$ continu is. Zij daartoe $U \in \tau_Y$ willekeurig. We willen aantonen dat $\widetilde{f}^{-1}(U) \in \tau_\sim$. Bij definitie van $\tau_\sim$ willen we aantonen dat $\pi^{-1}(\widetilde{f}^{-1}(U)) \in \tau_X$. Omdat $\pi^{-1}(\widetilde{f}^{-1}(U)) = (\widetilde{f} \circ \pi)^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ volgt dit omdat f continu is.

(b) Als f een open afbeelding is, toon dan aan dat $\widetilde{f}$ een homeomorfisme is.

(b) Uit deel (a) weten we al dat $\widetilde{f}$ een continue bijectie is. Blijft aan te tonen dat $\widetilde{f}^{-1}$ continu is. Zij dus $U \in \tau_\sim$, d.w.z. $\pi^{-1}(U) \in \tau_X$. We willen aantonen dat $\widetilde{f}(U) \in \tau_Y$. Omdat f open is, is $f(\pi^{-1}(U)) \in \tau_Y$. Nu is $\widetilde{f}(U) = f(\pi^{-1}(U))$, want

$$y \in \widetilde{f}(U) \iff y = \widetilde{f}(\pi(x)),\ \pi(x) \in U \iff y = f(x),\ x \in \pi^{-1}(U) \iff y \in f(\pi^{-1}(U)).$$

Zij nu bovendien X, Y topologische vectorruimten en f lineair.

(c) Toon aan dat π dan een open afbeelding is.

(c) Zij $U \in \tau_X$. We willen aantonen dat $\pi(U) \in \tau_\sim$, m.a.w. dat $\pi^{-1}(\pi(U)) \in \tau_X$. Zij willekeurig $x \in \pi^{-1}(\pi(U))$, d.w.z. $\pi(x) \in \pi(U)$. Dan bestaat $u \in U$ met $\pi(x) = \pi(u)$. Omdat X een topologische vectorruimte is, is voor elke $a \in X$ de afbeelding $X \to X\colon x \mapsto a + x$ een homeomorfisme. Daardoor is ook $x - u + U \in \tau_X$, met $x \in x - u + U$. Omdat π lineair is, is

$$\pi(y) \in \pi(x) - \pi(u) + \pi(U) = \pi(U), \quad \forall y \in x - u + U$$

zodat $x - u + U \subseteq \pi^{-1}(\pi(U))$ en dus $x \in (\pi^{-1}(\pi(U)))^\circ$.

OF, anders geformuleerd: Zij $U \in \tau_X$. We willen aantonen dat $\pi(U) \in \tau_\sim$, m.a.w. dat $\pi^{-1}(\pi(U)) \in \tau_X$. Omdat

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\pi(U)) &= \{x \in X : \pi(x) \in \pi(U)\} = \{x \in X : (\exists u \in U)(x \sim u)\} \\ &= \{x \in X : (\exists u \in U)(\exists y \in \operatorname{Ker} f)(x - u = y)\} = \bigcup_{y \in \operatorname{Ker} f} y + U\end{aligned}$$

is $\pi^{-1}(\pi(U))$ open als unie van open verzamelingen $y + U$ (omdat voor elke $a \in X$ de afbeelding $X \to X\colon x \mapsto a + x$ een homeomorfisme is).

(d) Toon aan dat dan f een open afbeelding is als en slechts als $\widetilde{f}$ een homeomorfisme is.

(d) $\Rightarrow$: volgt uit deel (b).
$\Leftarrow$: als $\widetilde{f}$ een homeomorfisme is, dan is $\widetilde{f}^{-1}$ continu en $\widetilde{f}$ bijectief, zodat $\widetilde{f}$ een open afbeelding is. Door deel (c) is dan $f = \widetilde{f} \circ \pi$ een open afbeelding als samenstelling van twee open afbeeldingen.

4. (a) Zij (X, τ) een niet-compacte Hausdorff-ruimte en $\varnothing \neq U \in \tau$ met $\overline{U}$ compact. Zij K een compacte deelverzameling van X waarvoor K° en $X \setminus K$ samenhangend zijn. Als $\partial U \subseteq \partial K$, toon dan aan dat $U = K^\circ$.

(a) Omdat K° samenhangend is, schrijven we $K^\circ = (K^\circ \cap U) \sqcup (K^\circ \setminus U)$. We tonen aan dat $K^\circ \cap U$ en $K^\circ \setminus U$ open zijn, zodat we kunnen besluiten dat

$$K^\circ \cap U = \varnothing \text{ of } K^\circ \subseteq U. \tag{1}$$

Omdat $\partial U \subseteq \partial K \subseteq X \setminus (K^\circ)$, is $K^\circ \cap \partial U = \varnothing$, zodat

$$K^\circ \cap \overline{U} = (K^\circ \cap U) \cup (K^\circ \cap \partial U) = K^\circ \cap U$$

tegelijk open en gesloten is in K°.
Analoog is $X \setminus K$ samenhangend, en schrijven we $X \setminus K = (U \setminus K) \sqcup (X \setminus K \setminus U)$ en tonen we aan dat $U \setminus K$ tegelijk open en gesloten is in $X \setminus K$, zodat we kunnen besluiten dat

$$U \subseteq K \text{ of } U \setminus K = X \setminus K. \tag{2}$$

Omdat $\partial U \subseteq \partial K \subseteq K$,[1] is $\partial U \setminus K = \varnothing$, zodat

$$\overline{U} \setminus K = (U \setminus K) \cup (\partial U \setminus K) = U \setminus K$$

[1]enkel hier gebruiken we dat X Hausdorff is, zodat K gesloten is in X

tegelijk open en gesloten is in $X \setminus K$.
Als $U \setminus K = X \setminus K$, dan zou $X = K \cup (X \setminus K) \subseteq K \cup \overline{U} \subseteq X$, zodat X compact is als unie van twee compacte verzamelingen, in strijd met het gegeven. Wegens (2) moet $U \subseteq K$ en dus $U = U^\circ \subseteq K^\circ$. Zou $K^\circ \cap U = \varnothing$, dan zou $U = \varnothing$, in strijd met het gegeven. Wegens (1) moet dus ook $K^\circ \subseteq U$.

(b) Zij X, Y topologische ruimten, Y Hausdorff en niet-compact, $K \subset\subset X$, $L \subset\subset Y$, $K^\circ \neq \varnothing$, f een continue afbeelding $K \to Y$ die een open afbeelding $K^\circ \to Y$ is. Veronderstel dat L° en $Y \setminus L$ samenhangend zijn. Als $f(\partial K) \subseteq \partial L$, toon dan aan dat $f(K^\circ) = L^\circ$.

(b) We passen deel (a) toe met $U := f(K^\circ)$. Omdat $K^\circ \neq \varnothing$, is ook $f(K^\circ) \neq \varnothing$. Omdat $f\colon K^\circ \to Y$ open is, is $f(K^\circ)$ open in Y. Om deel (a) toe te passen en te kunnen besluiten dat $U = L^\circ$, moeten we enkel nog nagaan dat

i. $\overline{U}$ compact is

ii. $\partial U \subseteq \partial L$.

(i) Omdat K compact is en f continu, is ook $f(K)$ compact, en dus gesloten in de Hausdorff-ruimte Y. Omdat $K^\circ \subseteq K$, is ook $f(K^\circ) \subseteq f(K)$, en dus ook $\overline{U} = \overline{f(K^\circ)} \subseteq \overline{f(K)} = f(K)$. Daardoor is $\overline{U}$ ook gesloten in de compacte deelruimte $f(K)$, en dus zelf compact.
(ii)

$$\partial U = \overline{U} \setminus U \overset{(\text{deel a})}{\subseteq} f(K) \setminus f(K^\circ) \overset{(*)}{\subseteq} f(K \setminus K^\circ) \subseteq f(\partial K) \overset{(\text{geg.})}{\subseteq} \partial L.$$

De inclusie $(*)$ volgt als volgt: als $y \in f(K) \setminus f(K^\circ)$, dan is $y = f(x)$ voor zekere $x \in K$. Maar $x \notin K^\circ$, want anders zou $y \in f(K^\circ)$. Bijgevolg is $x \in K \setminus K^\circ$, en $f(x) \in f(K \setminus K^\circ)$. (Opmerking: de omgekeerde inclusie in $(*)$ is enkel gegarandeerd als f injectief is.)

5. Zij X een verzameling en $A_n \subseteq X$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Definieer

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k \quad \text{en} \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k.$$

Definieer $\lim_{n\to\infty} A_n := \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ als beide verzamelingen gelijk zijn.

(a) Toon aan dat een monotone rij $(A_n)_n$ steeds een limiet heeft.

(a) Zij $(A_n)_n$ stijgend. Dan is $\bigcup_{k\geq n} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, zodat ook $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Anderzijds is $\bigcap_{k\geq n} A_k = A_n$, zodat $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
Analoog als $(A_n)_n$ dalend is (OF: $(A_n^c)_n$ is dan stijgend, zodat $\overline{\lim} A_n^c = (\underline{\lim} A_n)^c$ en $\underline{\lim} A_n^c = (\overline{\lim} A_n)^c$ bestaan door wat we juist bewezen).

(b) Toon aan dat $\lim_{n\to\infty} A_n$ bestaat als en slechts als $\lim_{n\to\infty} 1_{A_n}$ (puntsgewijs) bestaat en dat $1_{\lim_{n\to\infty} A_n} = \lim_{n\to\infty} 1_{A_n}$ puntsgewijs.
HINT: Toon aan dat $1_{\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n} = \overline{\lim}_{n\to\infty} 1_{A_n}$ en $1_{\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n} = \underline{\lim}_{n\to\infty} 1_{A_n}$.

(b) Voor willekeurige $A_n \subseteq X$ en $x \in X$ is $\sup_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n}(x) = 1_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}(x)$, want als $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, dan is $x \in A_n$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$, zodat beide leden gelijk zijn aan 1, en als $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, dan is $x \notin A_n$ voor elke $n \in \mathbb{N}$, zodat beide leden gelijk zijn aan 0. Analoog is $\inf_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n}(x) = 1_{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n}$. Daardoor is voor elke $x \in X$

$$1_{\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n}(x) = 1_{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k}(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} 1_{\bigcup_{k\geq n} A_k}(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} 1_{A_k}(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} 1_{A_n}(x)$$

zodat $1_{\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n} = \overline{\lim}_{n\to\infty} 1_{A_n}$ en analoog $1_{\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n} = \underline{\lim}_{n\to\infty} 1_{A_n}$. Dan is

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \iff 1_{\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n} = 1_{\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n} \iff \overline{\lim_{n\to\infty}} 1_{A_n} = \underline{\lim_{n\to\infty}} 1_{A_n}$$

waaruit het gevraagde volgt.

Zij nu A_n Lebesgue-meetbaar voor elke $n \in \mathbb{N}$ en noteer de Lebesgue-maat d.m.v. μ. Toon aan:

(c) Als $\mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) < +\infty$ en $\lim_{n\to\infty} A_n$ bestaat, dan is $\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

(c)

$$\mu\Big(\lim_{n\to\infty} A_n\Big) = \int 1_{\lim_{n\to\infty} A_n} \stackrel{(deel\ b)}{=} \int \lim_{n\to\infty} 1_{A_n} = \lim_{n\to\infty} \int 1_{A_n} = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

We kunnen hier limiet en integraal verwisselen door gedomineerde convergentie: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *is meetbaar en* $\mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \int 1_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} < +\infty$*, zodat* $1_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$ *integreerbaar is. Omdat* $|1_{A_n}| = 1_{A_n} \leq 1_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$ *voor elke* $n \in \mathbb{N}$*, is* $1_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$ *een integreerbare majorante.*

OF: ongeacht of $\lim_{n\to\infty} A_n$ *bestaat, is door de continuïteit en het stijgend zijn van* μ

$$\mu\Big(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n\Big) \stackrel{(\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)<\infty)}{=} \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{k\geq n} A_k\Big) \geq \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \mu(A_k) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mu(A_n)$$

en

$$\mu\Big(\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcap_{k\geq n} A_k\Big) \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \mu(A_k) = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \mu(A_n).$$

Als $\lim_{n\to\infty} A_n$ *bestaat, is dus*

$$\mu\Big(\lim_{n\to\infty} A_n\Big) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mu(A_n) \geq \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \mu(A_n) \geq \mu\Big(\lim_{n\to\infty} A_n\Big)$$

zodat $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ *bestaat en gelijk is aan* $\mu(\lim_{n\to\infty} A_n)$*.*