

Discrete Wiskunde I: oefeningen

1 februari 2017, 8:30

*"Tu vois que dans l'art de faire du mal à son prochain,
l'imagination de l'homme ne connaît pas de limites."*

Argun Pied d'Arbre in Thorgal 9: Les archers.

1. Los het volgend stelsel recurrente betrekkingen op. Gevraagd is dus een expliciete beschrijving van zowel de rij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als de rij $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} + a_{n-2} - b_{n-2} & n \geq 2 \\ b_n = b_{n-1} + b_{n-2} - a_{n-2} & n \geq 2 \end{cases}$$

De beginvoorwaarden zijn $a_0 = 5$, $a_1 = 3$, $b_0 = 0$ en $b_1 = 3$, maar heb je niet noodzakelijk allemaal nodig. Geef zeer duidelijk aan welke je gebruikt om tot de oplossing te komen (en welke dus overbodig zijn).

Hint: let op alle voorwaarden.

2. Beschouw een oneven priemgetal p .

(a) Toon aan dat $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (p-1) \equiv (-1)^{(p-1)/4} \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod{p}$ als $p \equiv 1 \pmod{4}$. Zoek zelf een uitdrukking voor $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (p-1) \pmod{p}$ in het geval $p \equiv 3 \pmod{4}$ en toon ook deze aan.

(b) Toon aan dat

$$\left[\begin{matrix} 2 \\ p \end{matrix} \right] = \begin{cases} 1 & p \equiv 1, 7 \pmod{8} \\ -1 & p \equiv 3, 5 \pmod{8} \end{cases}$$

Hint: bereken het product uit (a) op een tweede wijze.

3. Na afloop van het Toernooi van de Hand organiseert koning Robert een feestmaal in de Rode Burcht. In totaal zijn er 50 genodigden (inclusief koning Robert), waaronder ook de zeven ridders van de Koningsgarde. Alle genodigden zitten aan een grote ronde tafel. De ridders van de Koningsgarde zitten telkens per twee naast elkaar, behalve ser Jaime (ook een ridder van de Koningsgarde) die alleen zit (geen van zijn burens zijn ridders van de Koningsgarde). Er zitten nooit 3 ridders van de Koningsgarde naast elkaar. Ser Barristan, bevelhebber van de Koningsgarde, zit zodanig dat er in beide richtingen minstens 2 andere ridders van de Koningsgarde tussen hem en ser Jaime zitten.

Hoeveel mogelijke tafelschikkingen zijn er? Een tafelschikking is dezelfde als iedere aanwezige dezelfde linker- en rechterbuur heeft. Voor alle duidelijkheid, de tafelschikking hangt af van de individuele personen, niet enkel van het al dan niet tot de Koningsgarde behoren. Bijvoorbeeld, het omwisselen van heer Eddard en heer Tywin (beiden geen leden van de Koningsgarde) geeft een andere tafelschikking, net als het omwisselen van twee ridders van de Koningsgarde.

4. Los de volgende vragen in verband met eindige velden op.

(a) Toon aan dat elk element in een eindig veld met karakteristiek p een p^{de} macht is van precies één getal in dat veld.

- (b) Bepaal voor elke $k = 0, \dots, 26$ hoeveel koppels (a, b) er in \mathbb{F}_{27}^2 zijn waarvoor $a^k = b^2$?
- (c) Beschouw \mathbb{F}_{16} met primitief element t dat voldoet aan $t^4 + t + 1 = 0$. Bepaal voor elke $s \in \{t^3, t^2 + t, t + 1\}$ hoeveel oplossingen de vergelijking $s^4 X^2 + st + 1 = 0$ heeft.