Examen Functieruimten - Deel theorie

15 januari 2016, 08:30 uur

Naam en Voornaam:

Lees eerst dit:

(i) Naam en voornaam hierboven invullen.

(ii) Nietje niet losmaken.

(iii) Enkel deze bundel afgeven; geen bladen toevoegen.

(iv) Schrijf duidelijk, gebruik bij voorkeur een donkere pen.

(v) Respecteer de antwoordvakken.

(vi) Als u een stelling, eigenschap, ... gebruikt, formuleer die dan, toon aan dat de voorwaarden vervuld zijn, maar bewijs die niet.

(vii) Speciaal voor de waar-of-valsvragen: doorstreep het foute antwoord; indien de bewering WAAR is: geef een bewijs (zie ook (vi)); indien VALS geef indien mogelijk een tegenvoorbeeld of motiveer omstandig; enkel indien de motivering correct is, wordt het antwoord goed bevonden. Respecteer telkens het antwoordvak (zie ook (v)).

(viii) De waar-vals vragen staan op 4 punten, de twee open vragen op 6 punten. Met de bonusvraag kan u 1 punt extra verdienen.

- vraag 1: WAAR of VALS

De afbeelding

$$T(\phi) = \sum_{n=1}^{m} a_n \phi(x_n), \qquad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

waarbij $a_n \in \mathbb{R}$ en $x_n \in \mathbb{R}$ definieert een distributie in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

- vraag 2: WAAR of VALS

Zij $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ een even functie. Dan is ook $\mathcal{F}^{\pm}(f)$ even en er geldt:

$$\mathcal{F}^{\pm}(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(\xi) \cos(x\xi) d\xi.$$

- vraag 3: WAAR of VALS

De vectorruimte $\mathbb{C}^m$ voorzien van de norm

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^3\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad x = (x_1, \ldots, x_m)$$

is geen hilbertruimte.

- vraag 4: WAAR of VALS

In distributionele zin geldt dat

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\right) = Y(x)$$

met

$$f(x) = \begin{cases} -x+2, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x, & x>0 \end{cases}$$

en $Y(x)$ de Heaviside distributie.

• vraag 5: Zij H een hilbertruimte, y en z vast maar willekeurig in H en beschouw de operator

$$T(x) = \langle x, z \rangle y.$$

(i) Bepaal T^*.

(ii) Bewijs dat $T^2 = \lambda T$ en bepaal λ.

(iii) Bepaal $\|T\|$.

(iv) Wanneer is $T^* = T$? Geef een nodige en voldoende voorwaarde!

(v) Bepaal alle eigenwaarden en eigenruimten van T.

• vraag 6: (i) Zij H een complexe hilbertruimte en $T : H \to H$ een begrensde lineaire operator. Als

$$\langle x, T(x) \rangle = 0, \qquad \forall x \in H$$

bewijs dan dat $T = 0$.

Hint: construeer met behulp van T twee zelftoegevoegde operatoren.

(ii) Geef een algemene definitie voor een inproductruimte en een hilbertruimte over het veld van de *reëele* getallen. Blijft voorgaande bewering (vraag 6 (i)) waar voor reëele hilbertruimten? Motiveer!

- Bonusvraag: bewijs volgende stelling. Zij $1 \leq p < r < q < \infty$ en veronderstel $f \in L^p \cap L^q$ met $f \neq 0$. Dan is $f \in L^r$ en er geldt:

$$\ln \|f\|_r \leq \alpha \ln \|f\|_p + (1-\alpha) \ln \|f\|_q$$

waarbij

$$\alpha = \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

Hint: gebruik de ongelijkheid van Hölder.