

Examen Functieruimten - Deel theorie

15 januari 2016, 08:30 uur

Naam en Voornaam:

Lees eerst dit:

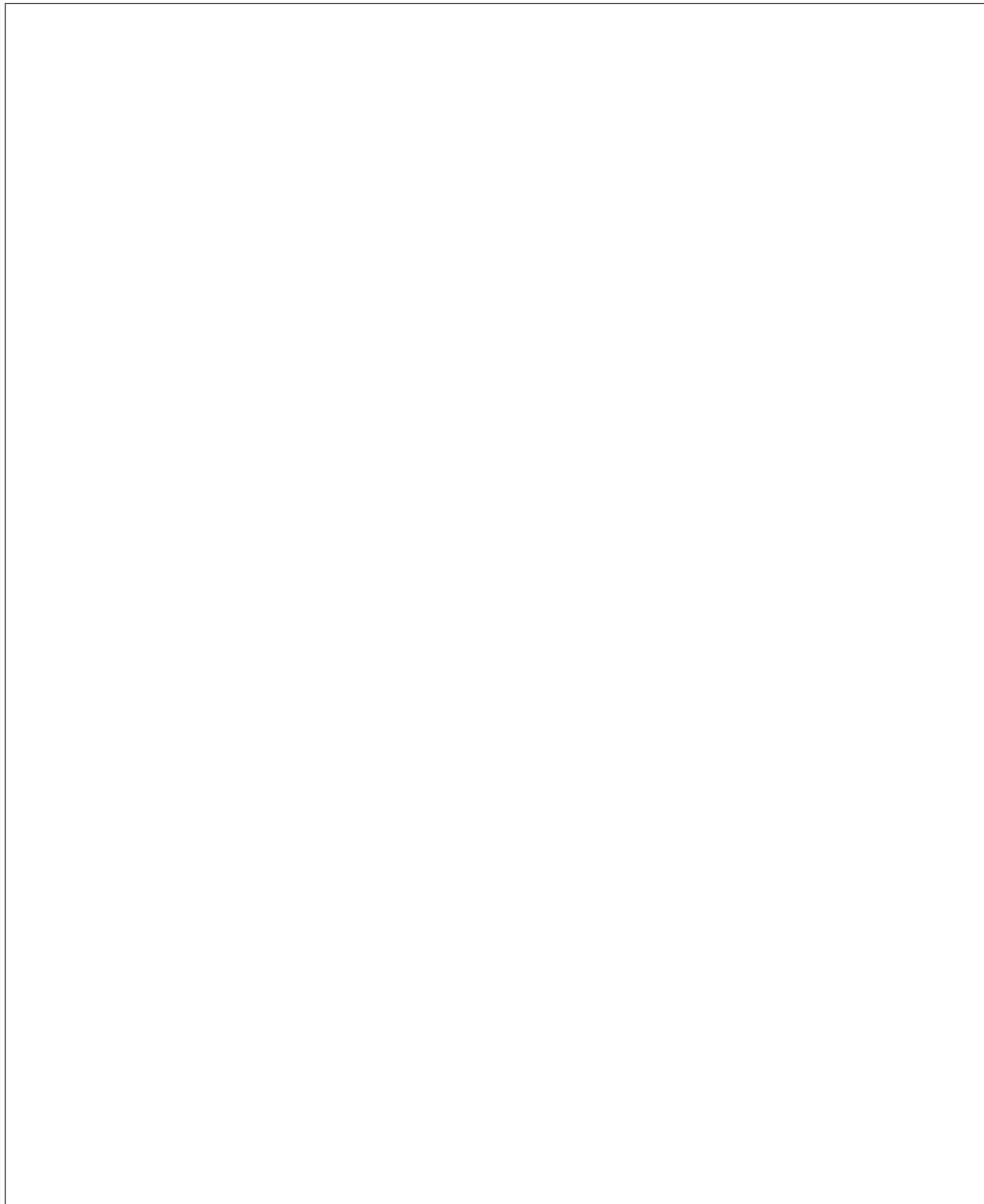
- (i) Naam en voornaam hierboven invullen.
- (ii) Nietje niet losmaken.
- (iii) Enkel deze bundel afgeven; geen bladen toevoegen.
- (iv) Schrijf duidelijk, gebruik bij voorkeur een donkere pen.
- (v) Respecteer de antwoordvakken.
- (vi) Als u een stelling, eigenschap, ... gebruikt, formuleer die dan, toon aan dat de voorwaarden vervuld zijn, maar bewijs die niet.
- (vii) Speciaal voor de waar-of-vals vragen: doorstreep het foute antwoord; indien de bewering WAAR is: geef een bewijs (zie ook (vi)); indien VALS geef indien mogelijk een tegenvoorbeeld of motiveer omstandig; enkel indien de motivering correct is, wordt het antwoord goed bevonden. Respecteer telkens het antwoordvak (zie ook (v)).
- (viii) De waar-vals vragen staan op 4 punten, de twee open vragen op 6 punten. Met de bonusvraag kan u 1 punt extra verdienen.

- vraag 1: WAAR of VALS

De afbeelding

$$T(\phi) = \sum_{n=1}^m a_n \phi(x_n), \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

waarbij $a_n \in \mathbb{R}$ en $x_n \in \mathbb{R}$ definieert een distributie in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.



- vraag 2: WAAR of VALS

Zij $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ een even functie. Dan is ook $\mathcal{F}^\pm(f)$ even en er geldt:

$$\mathcal{F}^\pm(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(\xi) \cos(x\xi) d\xi.$$

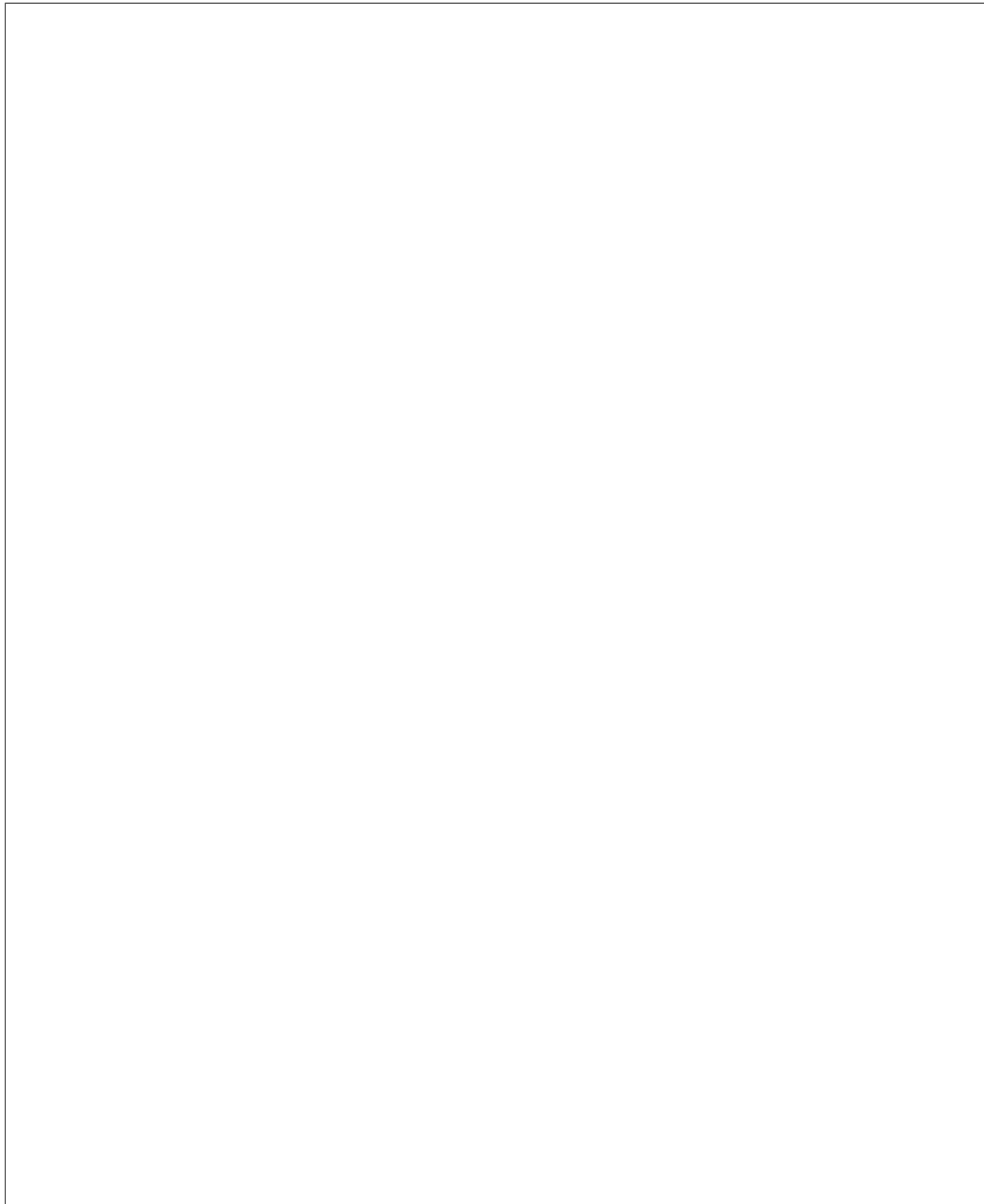


- vraag 3: WAAR of VALS

De vectorruimte \mathbb{C}^m voorzien van de norm

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^3 \right)^{\frac{1}{3}}, \quad x = (x_1, \dots, x_m)$$

is geen hilbertruimte.



• vraag 4: WAAR of VALS

In distributionele zin geldt dat

$$\frac{d}{dx} (f(x)) = Y(x)$$

met

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

en $Y(x)$ de Heaviside distributie.

• vraag 5: Zij H een hilbertruimte, y en z vast maar willekeurig in H en beschouw de operator

$$T(x) = \langle x, z \rangle y.$$

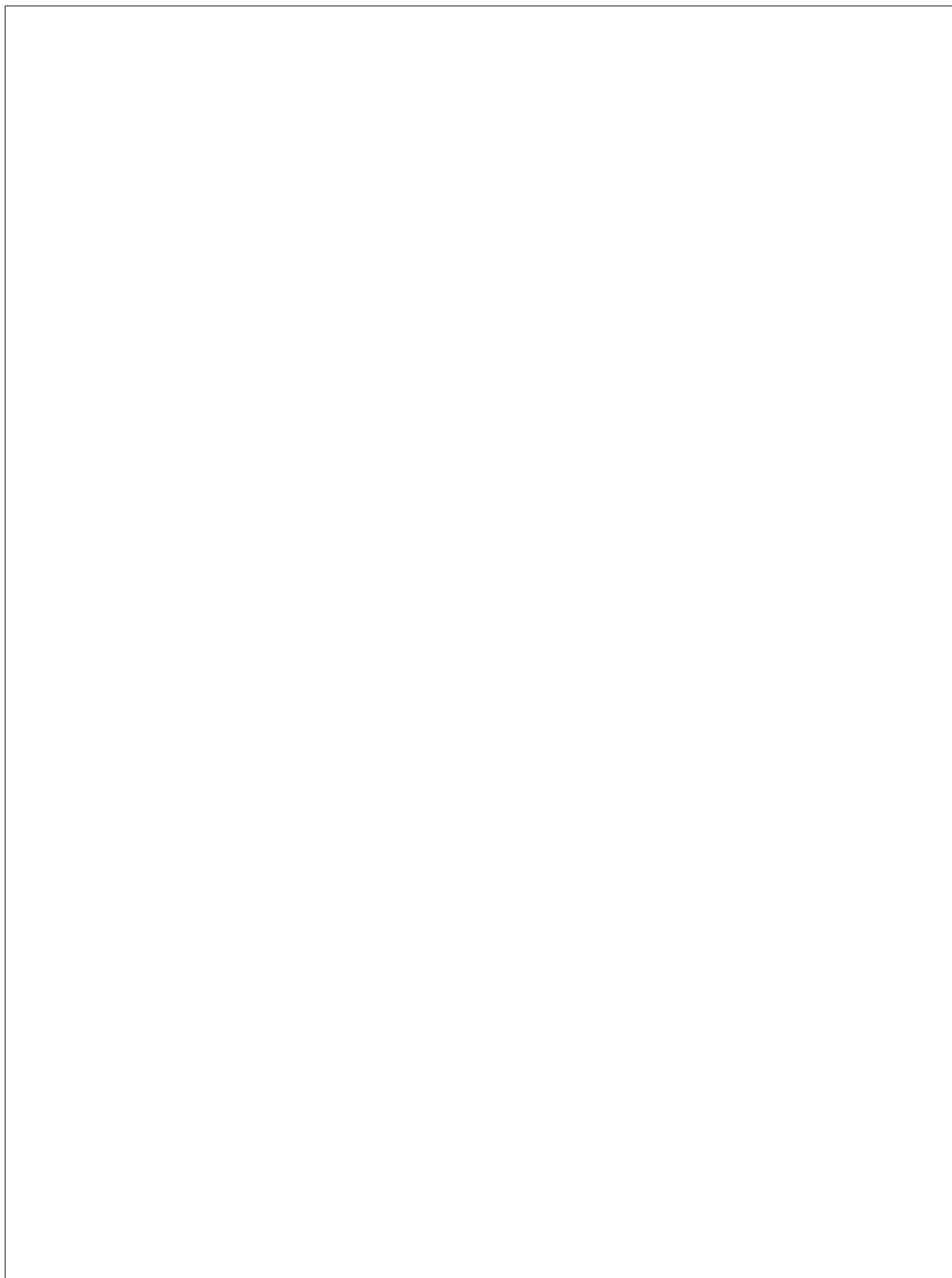
(i) Bepaal T^* .



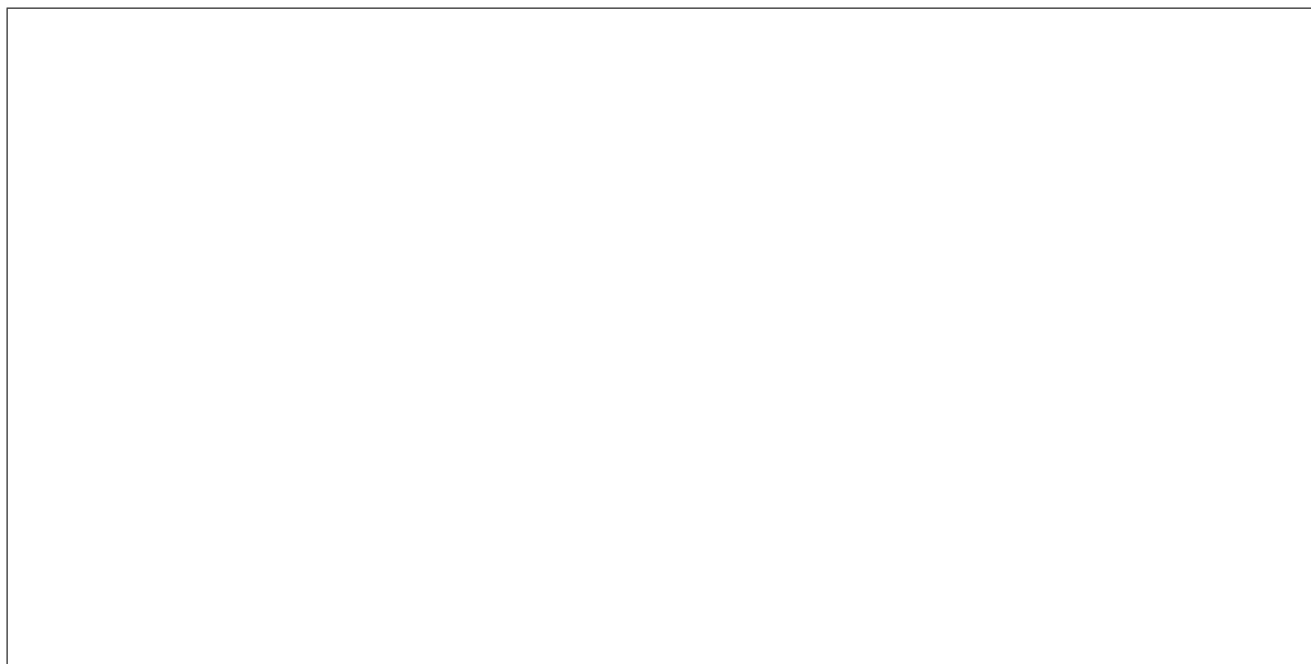
(ii) Bewijs dat $T^2 = \lambda T$ en bepaal λ .



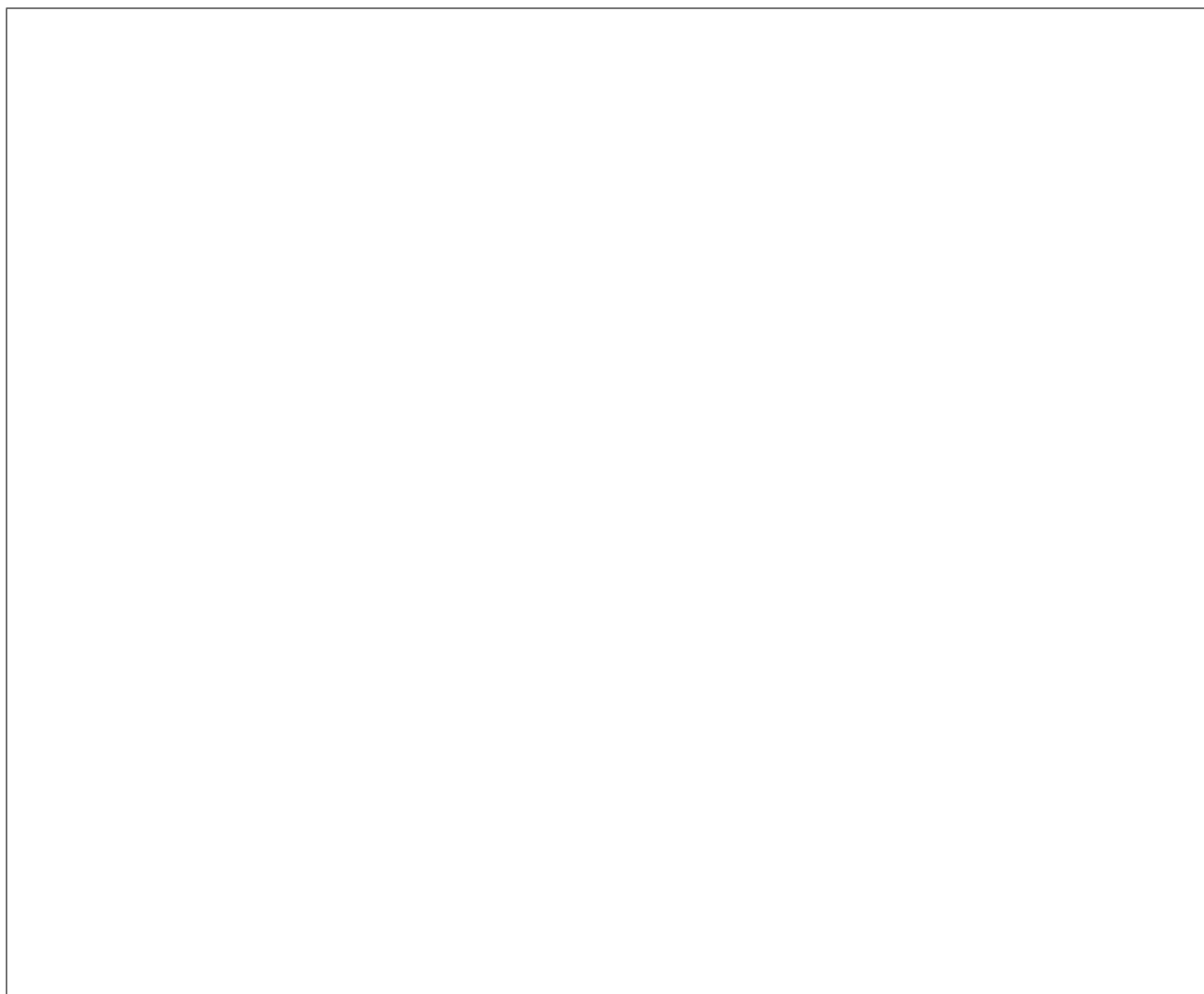
(iii) Bepaal $\|T\|$.



(iv) Wanneer is $T^* = T$? Geef een nodige en voldoende voorwaarde!



(v) Bepaal alle eigenwaarden en eigenruimten van T .



• vraag 6: (i) Zij H een complexe hilbertruimte en $T : H \rightarrow H$ een begrensde lineaire operator. Als

$$\langle x, T(x) \rangle = 0, \quad \forall x \in H$$

bewijs dan dat $T = 0$.

Hint: construeer met behulp van T twee zelftoegevoegde operatoren.

(ii) Geef een algemene definitie voor een inproductruimte en een hilbertruimte over het veld van de *reële* getallen. Blijft voorgaande bewering (vraag 6 (i)) waar voor reële hilbertruimten? Motiveer!

• Bonusvraag: bewijs volgende stelling. Zij $1 \leq p < r < q < \infty$ en veronderstel $f \in L^p \cap L^q$ met $f \neq 0$. Dan is $f \in L^r$ en er geldt:

$$\ln \|f\|_r \leq \alpha \ln \|f\|_p + (1 - \alpha) \ln \|f\|_q$$

waarbij

$$\alpha = \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

Hint: gebruik de ongelijkheid van Hölder.