

Examen Functieruimten - Deel oefeningen

15 januari 2016, 8:30 uur

Naam en Voornaam:

Lees eerst dit:

- (i) Naam en voornaam hierboven invullen.
- (ii) Nietje niet losmaken.
- (iii) Enkel deze bundel afgeven; geen bladen toevoegen.
- (iv) Schrijf duidelijk, gebruik bij voorkeur een donkere pen.
- (v) Respecteer de antwoordvakken.
- (vi) Als u een stelling, eigenschap, ... gebruikt, formuleer die dan, toon aan dat de voorwaarden vervuld zijn, maar bewijs die niet.

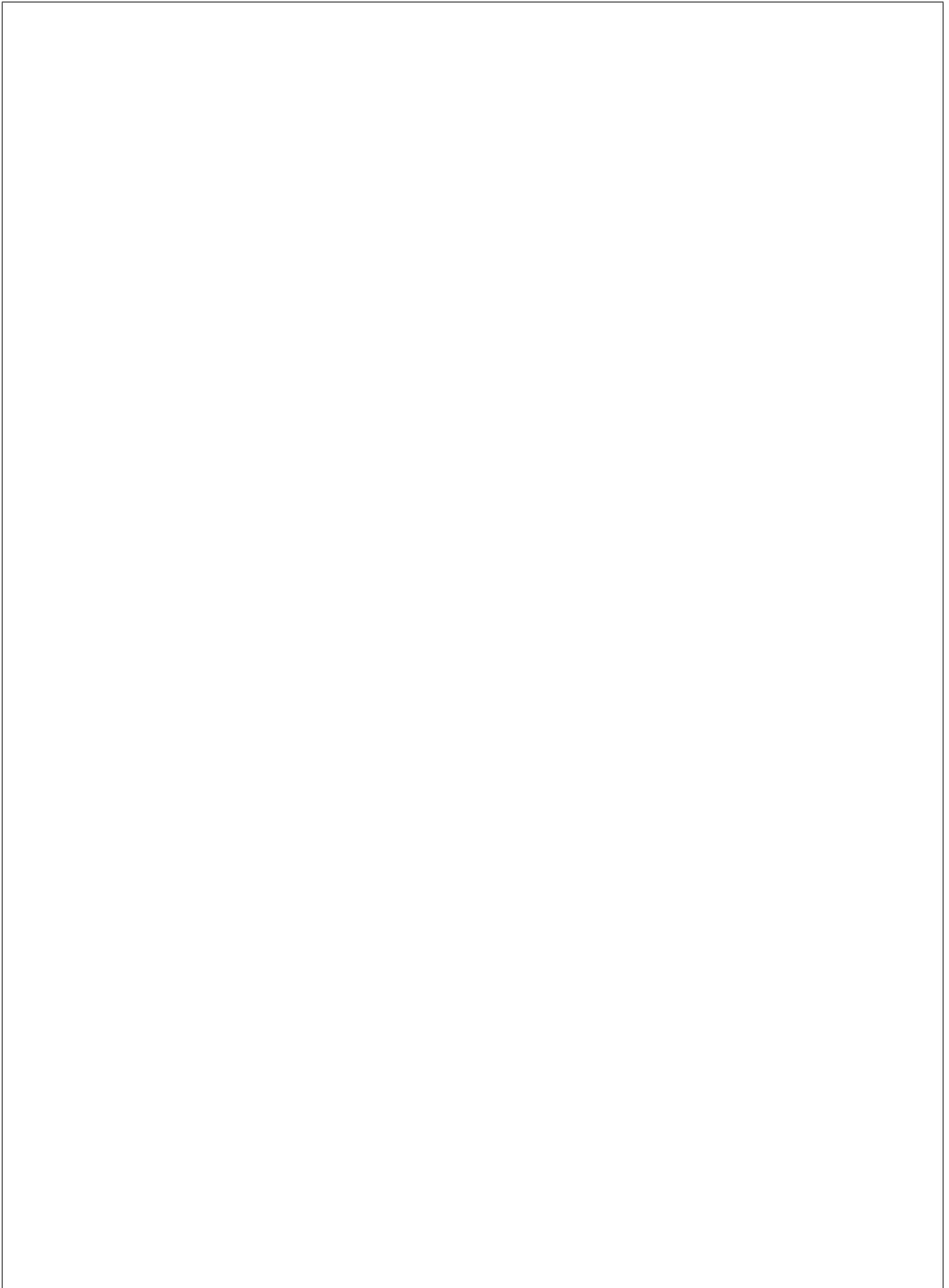
- Oefening 1

We werken in \mathbb{R} . Je mag gebruiken dat, voor $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \cos(ax) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \sqrt{2\pi} \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right).$$

1.a Bereken rechtstreeks $\mathcal{F}^{\pm}\left(\sin(ax) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)$.

Vervolg Oefening 1.a



1.b Je mag er nu vanuit gaan dat

$$\mathcal{F}^{\pm} \left(\sin(ax) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right) = \frac{\pm i}{2} \left(\exp\left(-\frac{1}{2}(y-a)^2\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}(y+a)^2\right) \right). \quad (1)$$

Opgelet: je mag dit niet gebruiken als startpunt voor puntje (a)!

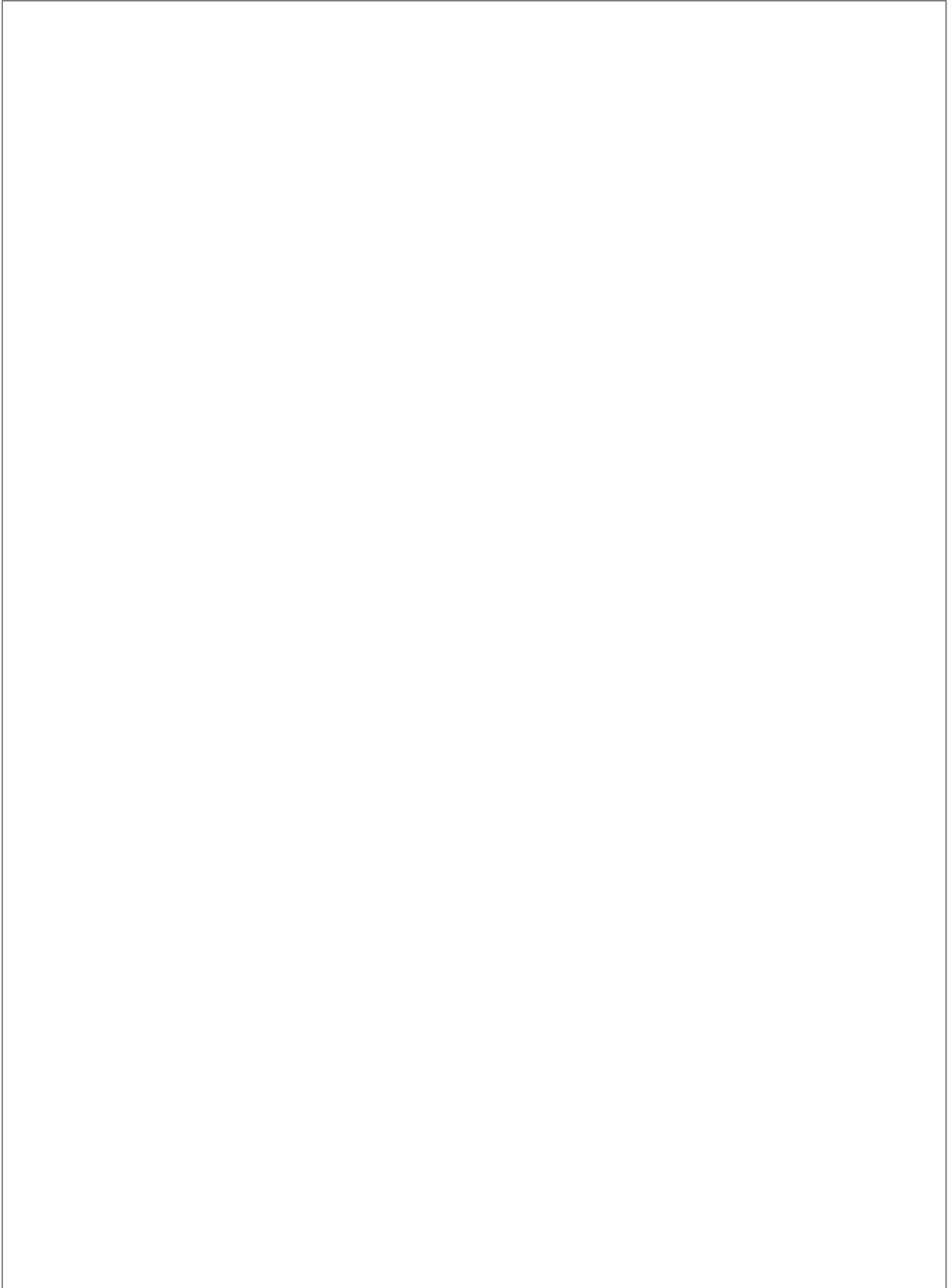
Bepaal *met behulp van (1)* de Fouriergetransformeerde van $\cos(ax) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

1.c Bepaal, door middel van Fouriertransformatie, een functie f zodanig dat

$$\left(f * \sqrt{2\pi} \exp(-x^2)\right)(y) = \cos(ay) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right).$$

Maak eventuele veronderstellingen duidelijk en controleer deze!

Vervolg Oefening 1.c



- Oefening 2. We werken in één dimensie.

2.a Herschrijf in \mathcal{D}^* de distributie $\cos(ax) \delta^{(2k)}$, waarbij $k \in \mathbb{N}$ en $a \in \mathbb{R}$, als een som van de vorm

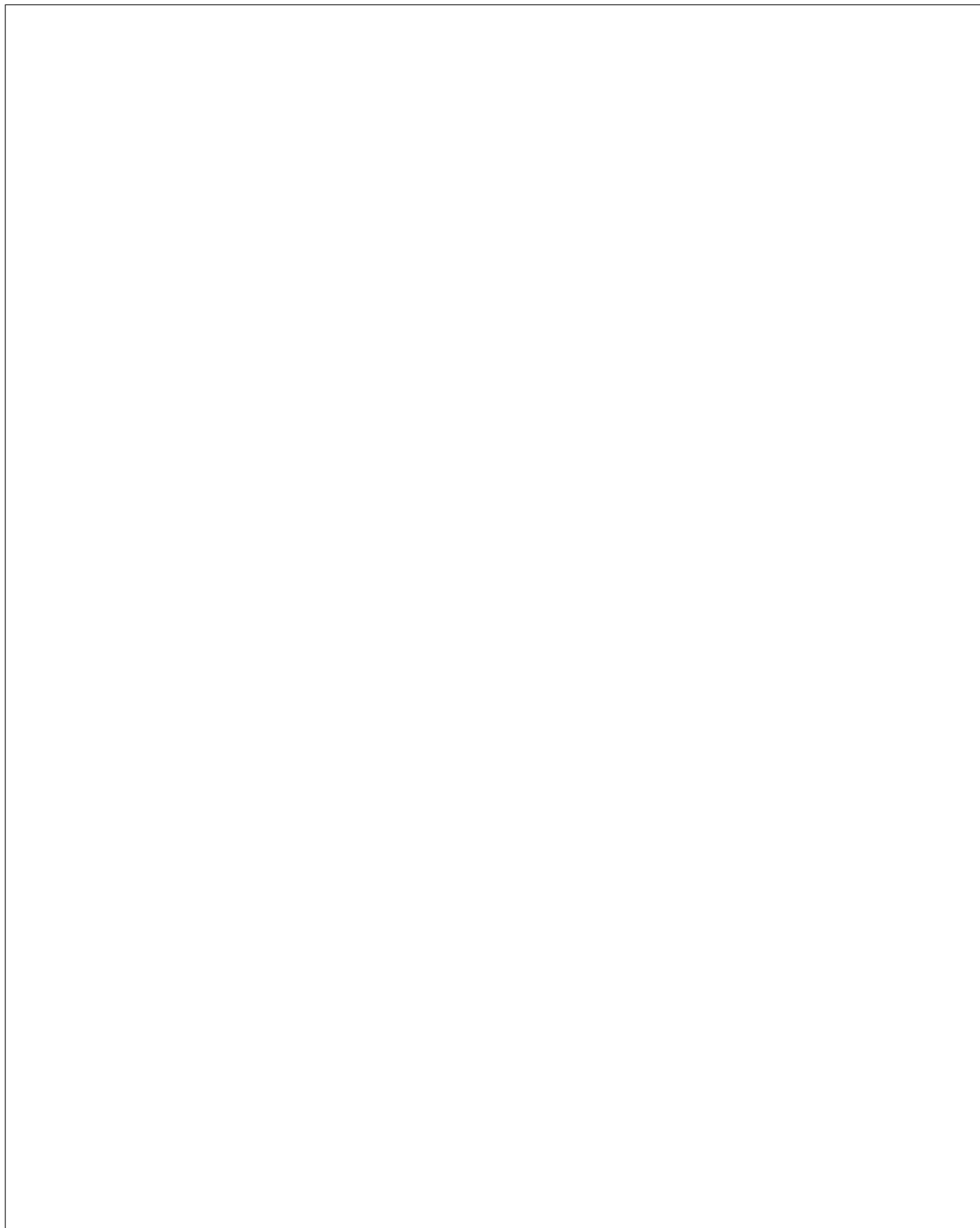
$$\sum_j c_j \delta^{(j)}.$$

Bepaal $c_j \in \mathbb{R}$ expliciet.

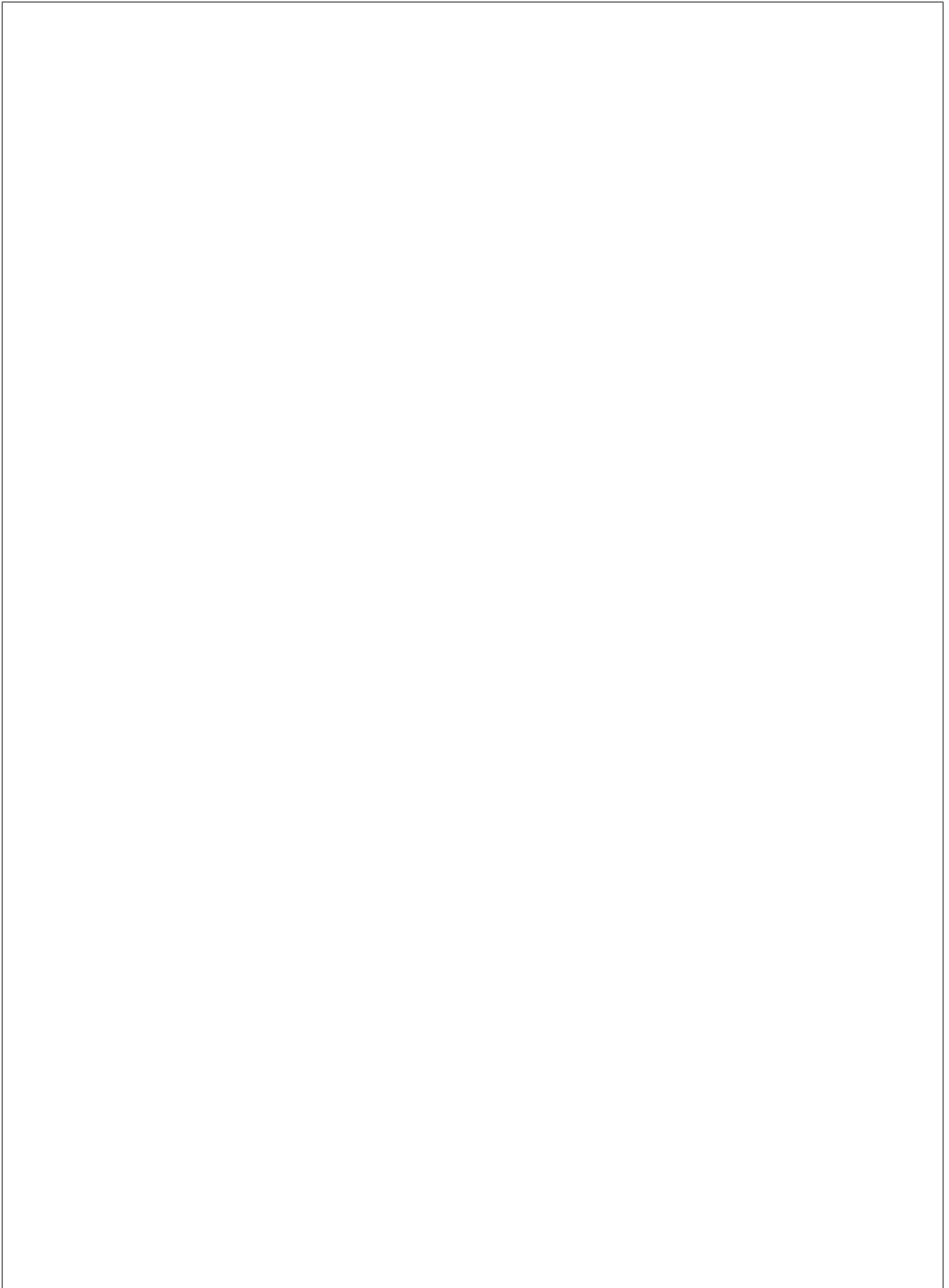
2.b Beschouw $\cos(ax) \delta^{(2)} = -a^2 \delta + \delta^{(2)}$. Ga na dat (in distributionele zin)

$$\cos(ax) \delta^{(2)} * \operatorname{sgn}(x) e^{-|x|}$$

goed gedefinieerd is en werk deze convolutie uit. Hierbij is $\operatorname{sgn}(x) = +1$ als $x > 0$, 0 als $x = 0$ en -1 als $x < 0$.



Vervolg Oefening 2.b



2.c Neem nu $a = 1$. Toon aan dat $\operatorname{sgn}(x) e^{-|x|}$ getemperd is en bepaal, met behulp van 2.b, de Fouriergetransformeerde van $\operatorname{sgn}(x) e^{-|x|}$.

