

# Examen Wiskundige Analyse V - Deel theorie

16 januari 2014, 8:30 uur

Naam en Voornaam:

Lees eerst dit:

- (i) Naam en voornaam hierboven invullen.
- (ii) Nietje niet losmaken.
- (iii) Enkel deze bundel afgeven; geen bladen toevoegen.
- (iv) Schrijf duidelijk, gebruik bij voorkeur een donkere pen.
- (v) Respecteer de antwoordvakken.
- (vi) Als u een stelling, eigenschap, ... gebruikt, formuleer die dan, toon aan dat de voorwaarden vervuld zijn, maar bewijs die niet.
- (vii) Speciaal voor de waar-of-vals vragen: doorstreep het foute antwoord; indien de bewering WAAR is: geef een bewijs (zie ook (vi)); indien VALS geef een tegenvoorbeeld; enkel indien de motivering correct is, wordt het antwoord goed bevonden. Respecteer telkens het antwoordvak (zie ook (v)).
- (viii) De waar-vals vragen staan op 4 punten, de open vraag op 6 punten. Met de bonusvraag kan u 1 punt extra verdienen.

- vraag 1: WAAR of VALS

De afbeelding

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \overline{g'(x)} dx$$

is een inproduct op  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

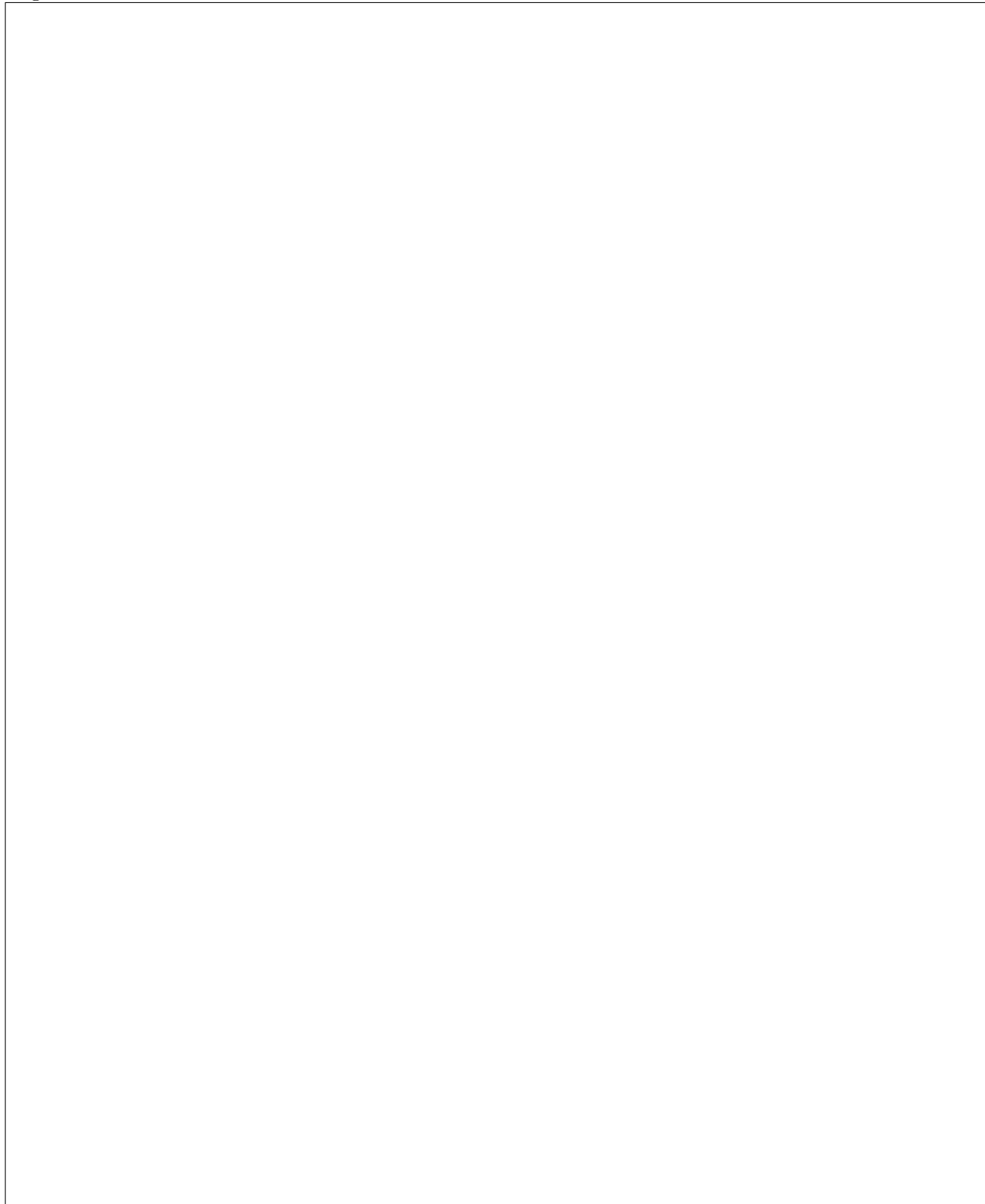


- vraag 2: WAAR of VALS

Zij  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Dan is

$$\frac{1}{4} (f - i\mathcal{F}^+ f - (\mathcal{F}^+)^2 f + i(\mathcal{F}^+)^3 f)$$

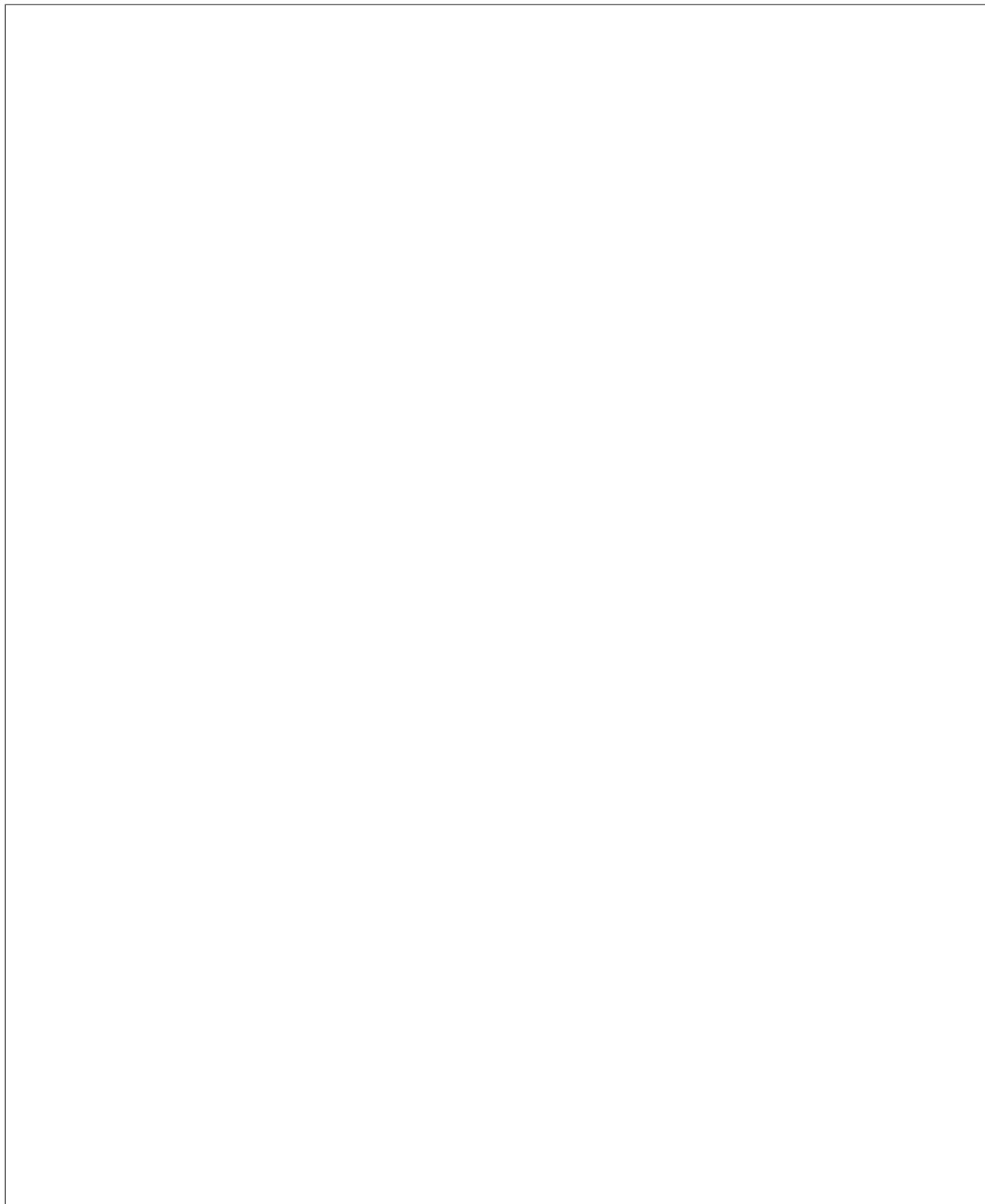
opnieuw een element van  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  en bovendien een eigenfunctie van de fouriertransformatie  $\mathcal{F}^+$  met eigenwaarde  $-i$ .



• vraag 3: WAAR of VALS

In distributionele zin geldt dat

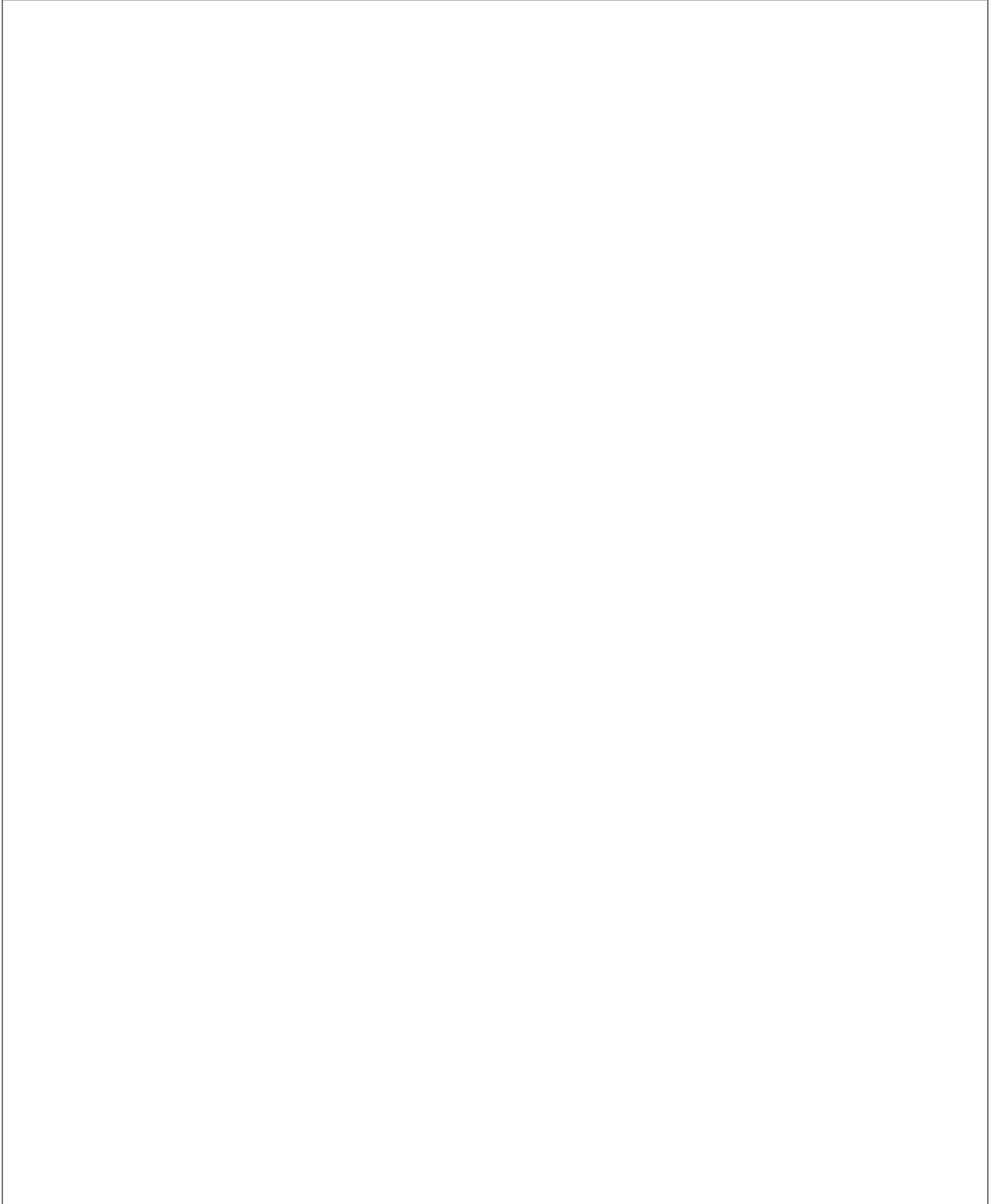
$$\mathcal{F}^+ \sin(ax) = \frac{1}{2i} (2\pi)^{n/2} (\delta(x+a) - \delta(x-a)).$$



• vraag 4: WAAR of VALS

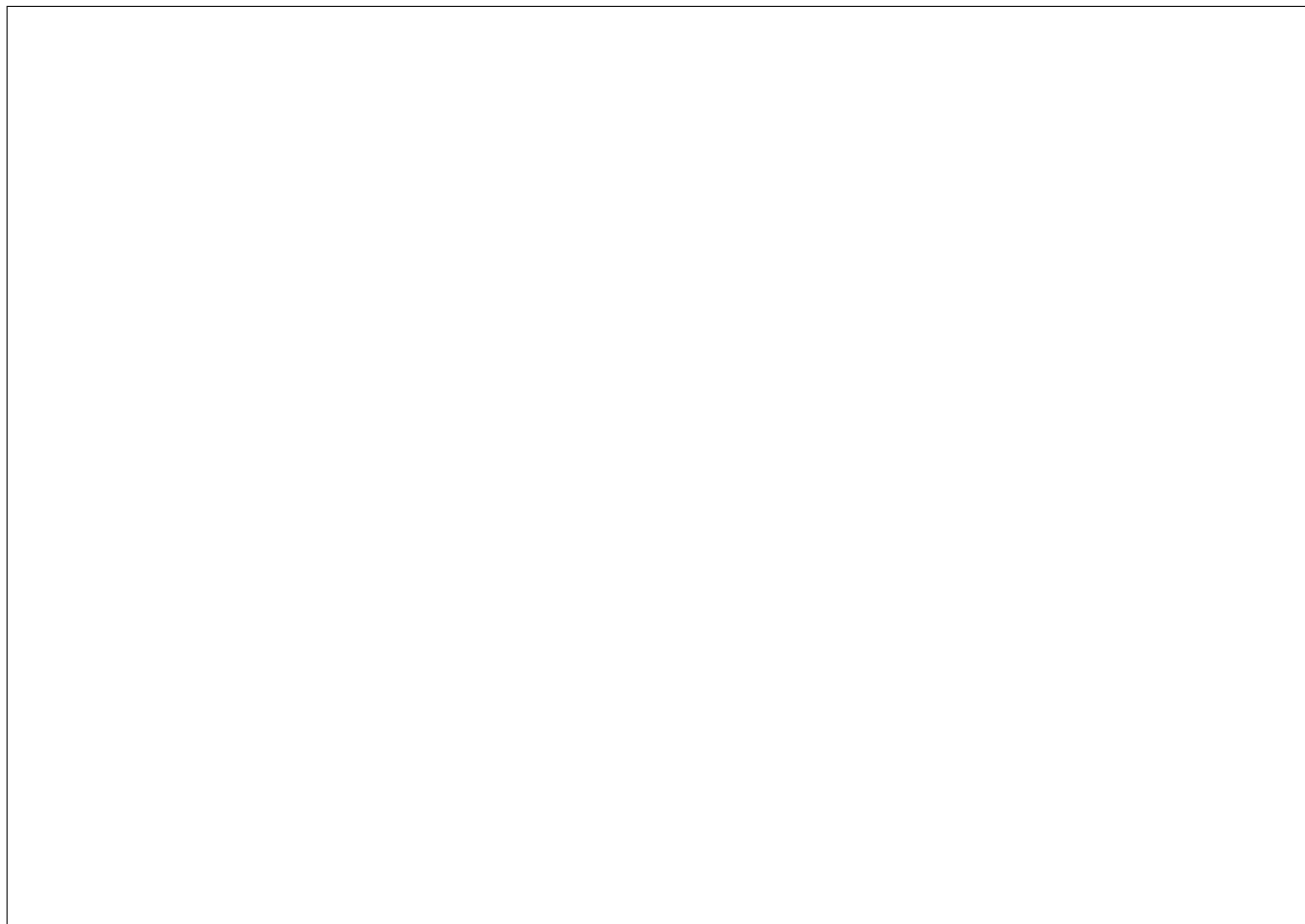
In distributionele zin geldt dat  $|x|' = \text{sgn}(x)$  met

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$



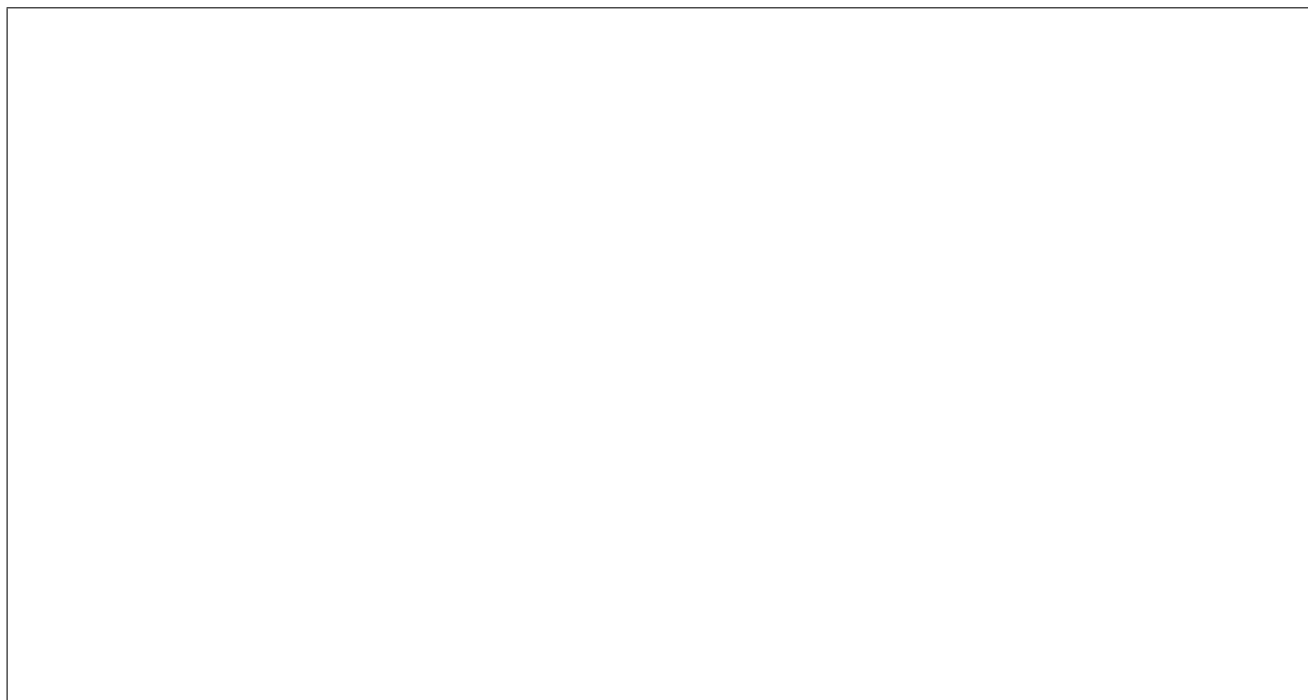
• vraag 5: Een begrensde lineaire operator  $T$  op een hilbertruimte  $H$  wordt normaal genoemd indien  $TT^* = T^*T$ .

(i) Geef een concreet voorbeeld van een normale operator, verschillend van  $\alpha I$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ .



Bewijs verder volgende eigenschappen:

(ii) Een begrensde operator  $T$  is normaal als en slechts als  $\|Tx\| = \|T^*x\|$  voor alle  $x \in H$ .



vervolg vraag 5 (ii)

A large, empty rectangular box with a thin black border, occupying most of the page below the question text. It is intended for the student to write their answer to the question.

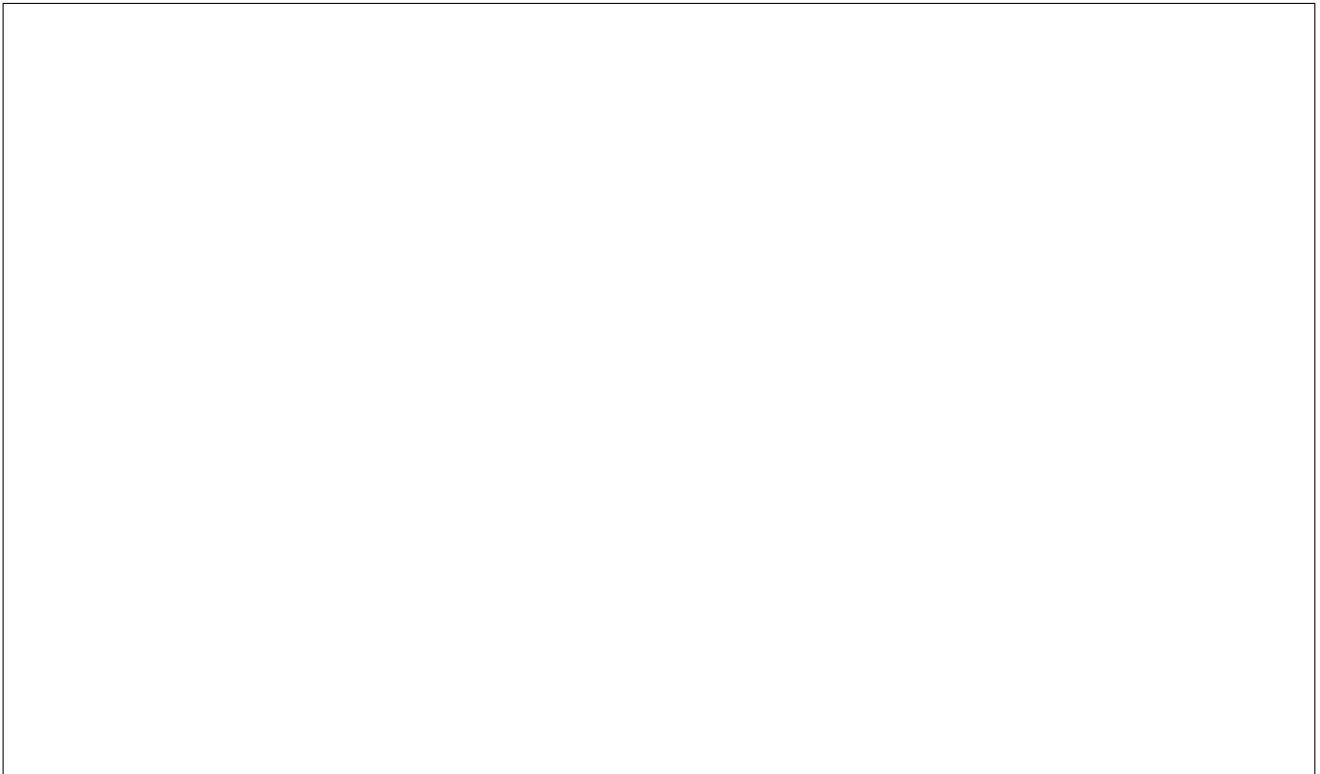
(iii) Zij  $T$  normaal en  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Dan is

$$\|T^*x - \bar{\lambda}x\| = \|Tx - \lambda x\|$$

voor alle  $x \in H$ .



(iv) Als  $T$  normaal is, dan is ook  $\alpha I - T$  normaal voor elke  $\alpha \in \mathbb{C}$ .



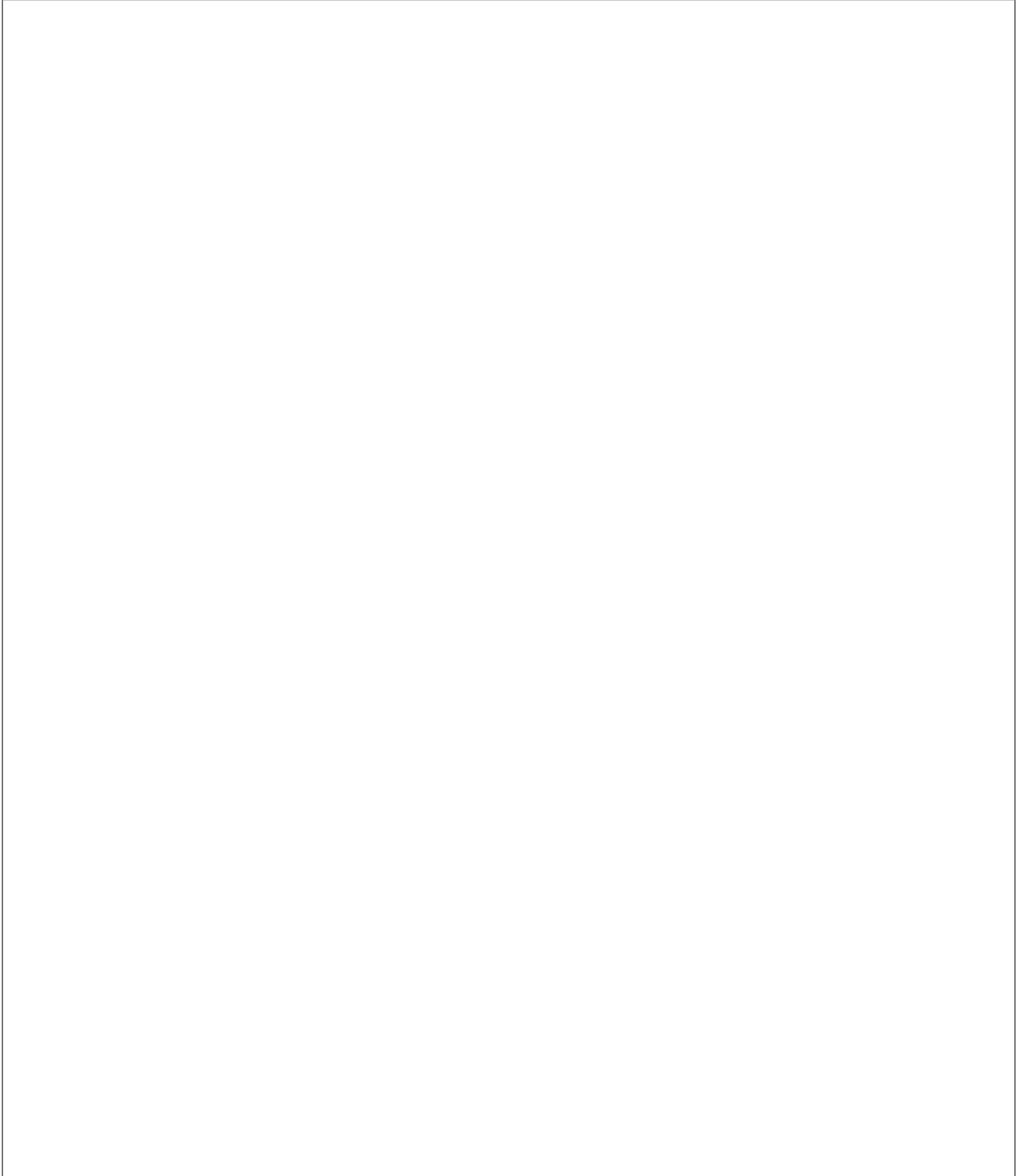


(v) Zij  $T$  een begrensde operator op een hilbertruimte  $H$  en stel dat  $A, B$  zelftoegevoegd zijn op  $H$  met  $T = A + iB$ . Dan is  $T$  normaal als en slechts als  $A$  en  $B$  commuteren.

• Bonusvraag: Zij  $1 < p_i < +\infty$ . Zij verder  $f_1 \in L^{p_1}(E)$ ,  $f_2 \in L^{p_2}(E)$ ,  $f_3 \in L^{p_3}(E)$  met  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1$ , dan is  $f_1 f_2 f_3 \in L^1(E)$  en

$$\left| \int_E f_1 f_2 f_3 \, dx \right| \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \|f_3\|_{p_3}$$

met  $\|f\|_{p_i} = \|f\|_{L^{p_i}(E)}$ . Hint: gebruik de Hölderongelijkheid voor twee functies (die bewezen verondersteld mag worden).



vervolg bonusvraag